



**Titre:** Analyse de lasers Raman tout-fibre : étude de stabilité  
Title:

**Auteur:** Bryan Burgoyne  
Author:

**Date:** 2003

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Burgoyne, B. (2003). Analyse de lasers Raman tout-fibre : étude de stabilité  
Citation: [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/7233/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7233/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Analyse de lasers Raman tout-fibre : étude de stabilité

BRYAN BURGOYNE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)  
(GÉNIE PHYSIQUE)  
NOVEMBRE 2003



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

Acquisitions et  
services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 0-612-89186-0*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 0-612-89186-0*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this dissertation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de ce manuscrit.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the dissertation.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

Analyse de lasers Raman tout-fibre : étude de stabilité

présenté par: BURGOYNE Bryan,

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. Lionel BERTRAND, D. d'état, président

M. Suzanne LACROIX, D.Sc., membre et directeur de recherche

M. Nicolas GODBOUT, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. Lawrence CHEN, Ph.D., membre

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le FCAR pour son soutien financier. Je voudrais également remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu des discussions intéressantes sur les lasers Raman, en particulier Éric SAULNIER et Johann GEST. Je remercie tout particulièrement mes directeurs, Suzanne LACROIX et Nicolas GODBOUT qui, en plus de leur soutien financier, ont démontré une patience infinie face mes questions répétées et qui ont su m'éclairer alors quand j'étais dans le noir.

Finalement, je remercie Martine qui me rappelle sans cesse que la vraie valeur de quelqu'un se mesure à son cœur et non à sa tête...

## Résumé

Dans ce mémoire, les lasers Raman tout-fibre en régime continu sont étudiés. Dans un premier temps, la résolution des équations régissant les lasers Raman avec des cavités linéaires est obtenue numériquement. Une résolution analytique approximative générale d'un laser Raman à  $N$  cascades avec une cavité linéaire est également obtenue et comparée à la solution numérique : la différence est d'environ 1%. La solution analytique est utilisée pour optimiser le laser afin d'obtenir la puissance de sortie maximale, le meilleur rendement possible ainsi que la puissance de seuil minimale en fonction des paramètres du laser. Il est également possible de déterminer des lois d'invariances reliant le gain, l'absorption et la longueur de la cavité. Ces lois permettent d'appliquer l'optimisation d'un laser sur différents autres lasers.

Le régime transitoire des lasers Raman à cavité linéaire est étudié numériquement. Pendant le régime transitoire, des pics de puissances d'une durée de quelques microsecondes apparaissent dans la cavité. Ces pics ont une puissance crête de quelques dizaines de watts. Le laser atteint le régime stationnaire au bout de 40 allers-retours dans la cavité pour une cascade de six étages.

La stabilité d'un laser Raman tout-fibre en anneau est ensuite étudiée. L'analyse permet de déterminer à quelles fréquences apparaissent les perturbations, leur gain et si ces perturbations font auto-pulser le laser. On trouve que le gain Raman ne fait pas auto-pulser le laser. Toutefois, à cause du pompage, il y a des variations de puissance dans la cavité, ce qui créent des perturbations qui sont calculées, à notre connaissance, pour la première fois. Bien que ces perturbations pourraient faire auto-pulser le laser,

leur faible largeur spectrale (quelques dizaines de picomètres) les rendent difficilement observables ou exploitables. La technique développée est analytique et numérique et permet d'analyser la stabilité de différents composants optiques tout-fibre.

# Abstract

In this Masters thesis, continuous wave fiber Raman lasers are studied. First, the resolution of the equations governing the behavior of Raman lasers with linear cavities is done through numerical simulations. An approximate analytical solution is also found and compared to the numerical solutions: the difference is around 1%. The analytical solution is used to find the optimal output power, efficiency and threshold power. Scaling rules are also obtained from this solution. A specific optimisation of the laser characteristics can be applied to numerous lasers through these rules.

The transient regime of the Raman lasers with linear cavities is explored numerically. During the transient regime, pulses of a few microseconds duration are observed in the cavity. Those pulses can reach tens of watts of peak power. The steady-state regime is reached after 40 roundtrips for a 6 stages cascade.

The stability of a fiber Raman ring laser is calculated. The analysis yields the frequencies and gain of the perturbations and whether this perturbations can self-start the laser. The Raman gain cannot self-start the laser; however the Raman effect causes power variations in the cavity. Those power variations creates perturbations and are calculated for the first time at our knowledge. The perturbations thus created can self-start the laser but since their spectral width is only a few tens of picometers, they are unlikely to be observed experimentally. The method used to do the stability analysis is part analytical, part numerical and can be used to study different all-fiber optical components.



# Table des matières

Remerciements . . . . .	iv
Résumé . . . . .	v
Abstract . . . . .	vii
Table des matières . . . . .	viii
Liste des figures . . . . .	xi
Liste des tableaux . . . . .	xiii
Liste des annexes . . . . .	xiv
Liste des sigles et abréviations . . . . .	xv
Introduction . . . . .	1
1 Laser Raman . . . . .	8
1.1 Configuration du laser . . . . .	8
1.1.1 Schéma du laser . . . . .	8
1.1.2 Équations du laser en cascades . . . . .	9
1.1.3 Conditions aux frontières . . . . .	11
1.2 Simulation du régime continu . . . . .	11
1.2.1 Méthode numérique . . . . .	11

1.2.2	Puissance intracavité . . . . .	13
1.3	Résolution analytique du régime continu . . . . .	15
1.3.1	Définition . . . . .	15
1.3.2	Résolution . . . . .	16
1.3.3	Comparaison . . . . .	23
1.3.4	Rendement et seuil . . . . .	23
1.3.5	Lois d'invariance . . . . .	26
1.3.6	Optimisation des paramètres . . . . .	28
1.4	Simulation du régime transitoire . . . . .	36
1.4.1	Méthode numérique . . . . .	37
1.4.2	Régime transitoire . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Analyse de stabilité . . . . .</b>	<b>44</b>
2.1	Méthode d'analyse . . . . .	44
2.1.1	Équations couplées . . . . .	45
2.1.2	Polarisations non-linéaires . . . . .	46
2.1.3	Polarisation non perturbée . . . . .	47
2.1.4	Polarisation perturbée . . . . .	49
2.2	Équations couplées . . . . .	51
2.3	Solution locale . . . . .	56
2.3.1	Solution locale non perturbée . . . . .	56
2.3.2	Solution locale perturbée . . . . .	56
2.3.3	Calcul des valeurs et vecteurs propres . . . . .	60
2.3.4	Stabilité locale . . . . .	60
2.3.5	Exemple . . . . .	61
2.4	Solution globale . . . . .	63
2.5	Exemple . . . . .	64
2.5.1	Solution non perturbée . . . . .	65
2.5.2	Analyse de stabilité locale . . . . .	66

2.5.3	Analyse de stabilité du laser . . . . .	67
<b>Conclusion . . . . .</b>		<b>73</b>
<b>Bibliographie . . . . .</b>		<b>75</b>
A.1	Définitions . . . . .	79
A.2	Propriétés . . . . .	80
B.1	Équation d'onde . . . . .	81
B.2	Polarisations . . . . .	83
B.2.1	Différentes contributions au coefficient $\chi^{(3)}$ . . . . .	86
B.2.2	Polarisations dans le domaine spectral . . . . .	90
B.3	Équations de propagation générales . . . . .	92
B.3.1	Champ électrique . . . . .	92
B.3.2	Élimination de la partie transverse . . . . .	93
B.3.3	Normalisation en puissance . . . . .	97
B.3.4	Équation de propagation dans le domaine du temps . . . . .	99
B.4	Équations de propagation femtoseconde . . . . .	101
B.5	Équations de propagation picoseconde . . . . .	104
B.6	Équations en régime continu et quasi-continu . . . . .	106
B.6.1	Cohérence . . . . .	106
C.1	Définition . . . . .	109
C.2	Algorithme QR . . . . .	110
C.3	Calcul des vecteurs propres . . . . .	111
D.1	Instabilité de modulation . . . . .	112
D.2	Instabilité de modulation avec changement de puissance . . . . .	115

# Liste des figures

1	Transitions Raman . . . . .	2
2	Schéma d'un laser Raman . . . . .	3
3	Laser Raman tout-fibre en cascades . . . . .	5
1.1	Cavité Raman linéaire . . . . .	9
1.2	Définition du problème en régime continu . . . . .	12
1.3	Simulation de la puissance de chacune des ondes de Stokes en fonction de $z$ . . . . .	13
1.4	Vue en détail des puissances des différentes ondes de Stokes dans la cavité . . . . .	14
1.5	Comparaison entre le calcul analytique et la simulation . . . . .	24
1.6	Erreur relative entre le calcul analytique et la simulation . . . . .	25
1.7	Courbes de niveaux de puissance de sortie en fonction de la longueur de la cavité et de la puissance d'injection . . . . .	32
1.8	Courbes de niveaux de puissance de sortie en fonction de la réflectivité du réseau de sortie et de la puissance d'injection . . . . .	33
1.9	Courbes de niveaux de puissance de sortie en fonction de la réflectivité du réseau de sortie et de la longueur de la cavité . . . . .	34
1.10	Vue en détail de la puissance de sortie en fonction de la réflectivité du réseau de sortie et de la longueur de la cavité . . . . .	34
1.11	Puissance des ondes de Stokes dans la cavité optimisée . . . . .	35
1.12	Vue en détail de la puissances des ondes de Stokes dans la cavité optimale . . . . .	35

1.13	Variations de la puissance dans la cavité avec le temps en régime transitoire pour la pompe et la première onde de Stokes . . . . .	38
1.14	Variations de la puissance dans la cavité avec le temps en régime transitoire pour la deuxième et la troisième onde de Stokes . . . . .	39
1.15	Variations de la puissance dans la cavité avec le temps en régime transitoire pour les 3 dernières ondes de Stokes . . . . .	40
1.16	Variations de la puissance sur une tranche au centre de la cavité avec le temps . . . . .	41
1.17	Variations de la puissance sur une tranche de la cavité avec le temps (zoom) . . . . .	42
1.18	La puissance peut être comparée à l'eau qui se déverse d'un réservoir (Stokes) à l'autre . . . . .	43
2.1	Diagramme des fréquences de perturbation . . . . .	45
2.2	Diagramme d'instabilité de modulation . . . . .	62
2.3	Laser Raman en anneau . . . . .	65
2.4	Puissance dans la cavité en anneau . . . . .	67
2.5	Diagramme de stabilité locale de la tranche centrée en $z = 0$ sur 40 THz . . . . .	68
2.6	Détail du diagramme de stabilité locale de la tranche centrée en $z = 0$ sur 6,5 THz . . . . .	68
2.7	Diagramme de stabilité globale sur 40 THz . . . . .	69
2.8	Détail du diagramme de stabilité globale sur 6,5 THz . . . . .	70
2.9	Détail du diagramme de stabilité globale sur 1,5 THz . . . . .	70
B.1	Réponse spectrale normalisée de la susceptibilité Raman . . . . .	89
B.2	Réponse temporelle normalisée de la susceptibilité Raman . . . . .	89
D.1	Stabilité d'une propagation avec changement soudain de puissance . . . . .	118

# Liste des tableaux

1.1	Paramètres de la fibre . . . . .	23
2.1	Contribution des termes non-perturbés . . . . .	48
2.2	Contribution des termes perturbés . . . . .	50
2.3	Paramètres de la fibre du laser Raman en anneau . . . . .	66

## Liste des annexes

A Transformée de Fourier . . . . .	79
B Équations de propagation . . . . .	81
C Décomposition QR . . . . .	109
D Instabilité de modulation avec saut de puissance . . . . .	112

# Liste des sigles et abréviations

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458$  m/s, vitesse de la lumière dans le vide

$f_R$  = fraction Raman de la non-linéarité

$g$  = gain Raman  $\text{m}^{-1}\text{W}^{-1}$

$h_R$  = réponse normalisée de la susceptibilité Raman

$n$  = indice de réfraction du milieu

$n_2$  = indice de réfraction non-linéaire du milieu

$A_{\text{eff}}$  = aire effective  $\text{m}^2$

$\vec{B}$  = magnétique T

$\vec{D}$  = électrique V/m

$\vec{E}$  = champ électrique V/m

$\vec{H}$  = champ magnétique T

$\vec{J}$  = densité de courant  $\text{A}/\text{m}^2$

$\vec{M}$  = polarisation magnétique T

$\vec{P}$  = polarisation électrique V/m

$P$  = puissance W

$R$  = coefficient de réflexion

Symboles grecs

$\alpha$  = absorption optique  $\text{m}^{-1}$

$\alpha_2$  = absorption optique non-linéaire  $\text{m}^{-1}\text{W}^{-1}$



$\beta$  = constante de propagation  $\text{m}^{-1}$

$\gamma$  = paramètre non-linéaire  $\text{m}^{-1}\text{W}^{-1}$

$\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12}$  F/m, permittivité électrique

$\lambda$  = longueur d'onde  $m$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m, perméabilité électrique

$\rho$  = densité de charge  $\text{C}/\text{m}^3$

$\chi$  = susceptibilité électrique

$\omega$  = pulsation rad/s

$\Omega$  = pulsation de perturbation rad/s

#### Acronymes

AMP = auto-modulation de phase

M4O = mélange à 4 ondes

MPM = modulation de phase mutuelle

# Introduction

L'émission Raman spontanée provient d'une interaction non-linéaire de troisième ordre de photons avec la matière. Les photons incidents sont absorbés et une partie de leur énergie excite les modes de vibration (ou rotation) de la molécule (phonons optiques). Les photons sont réémis à des fréquences plus basses (onde de Stokes) selon le spectre d'absorption non-linéaire (Raman) du matériau (voir Fig. 1). Le processus inverse peut également se produire mais est toutefois moins probable : un phonon optique donne son énergie à un photon qui est réémis à une fréquence plus élevée (onde d'anti-Stokes). À haute intensité, les photons sont réémis en phase avec des photons déjà présents aux fréquences de réémission ; c'est l'émission Raman *stimulée*. Puisque tous les photons produits par émission Raman stimulée sont en phase, il est possible d'en faire un laser.

Les premiers lasers Raman sont apparus dans les années 70 avec les premiers lasers suffisamment puissants pour générer l'émission Raman stimulée. Ces lasers sont constitués d'un laser de pompe haute puissance (lasers à colorant, laser CO<sub>2</sub>, laser excimère) qui excite une cellule où se produit le décalage Raman. La cellule contenait le plus souvent du dihydrogène ou le diazote à cause du fort décalage qu'ils génèrent (124 THz). À la sortie, les différentes raies de l'onde de Stokes (correspondant à différents modes de vibrations) sont séparées par un réseau ou un prisme, comme montré sur la Fig. 2. Des miroirs réfléchissent les fréquences désirées avant la cellule et après le prisme. Il est donc possible de choisir les longueurs d'onde d'opération en tournant le prisme, ce qui change les raies réfléchies. Il est également possible de

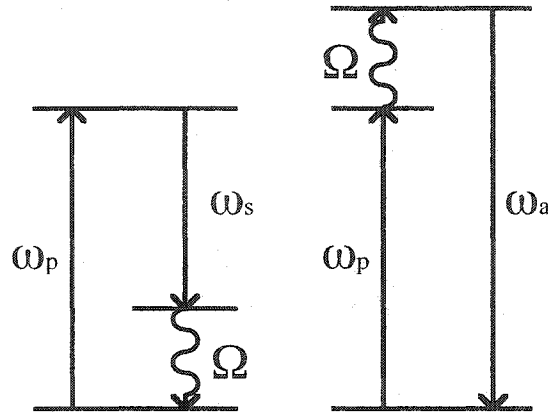


Figure 1 : Transition Stokes et anti-Stokes. Le photon de pompe incident est converti en un phonon et un photon de plus basse énergie dans le cas Stokes. Un photon anti-Stokes est créé lorsque l'énergie d'un phonon s'ajoute à celle de la pompe.

réitérer le processus en utilisant une des raies de la première onde de Stokes comme pompe si elle est suffisamment puissante. Une deuxième onde de Stokes est ainsi générée lors du passage de la première onde dans la cellule. Cette deuxième onde de Stokes peut être à son tour utilisée comme pompe. La cascade nous permet un décalage en fréquences plus grand qu'en utilisant seulement les différents raies Raman du milieu de gain. La puissance de sortie de ces lasers est limitée par la puissance pompe injectée et le seuil de destruction de la cellule.

À la même époque, les fibres optiques sont développées pour les réseaux de télécommunications longue distance. Les fibres optiques sont intéressantes car elles permettent de conduire la lumière avec très peu de pertes sur de longues distances. C'est en 1978 que J. AuYeung et A. Yariv [AuYeung & Yariv 1979] proposent le premier laser Raman à fibre optique où la cellule est remplacée par une centaine de mètres de fibre. Ce laser possède certains avantages sur ses prédécesseurs. Un rouleau de plusieurs centaines de *kilomètres* prend très peu de place ; il est donc possible d'avoir un milieu gain de la longueur désirée tout en étant compact. Les fibres optiques sont faites de verres de silice qui sont des matériaux qui peuvent supporter beaucoup de

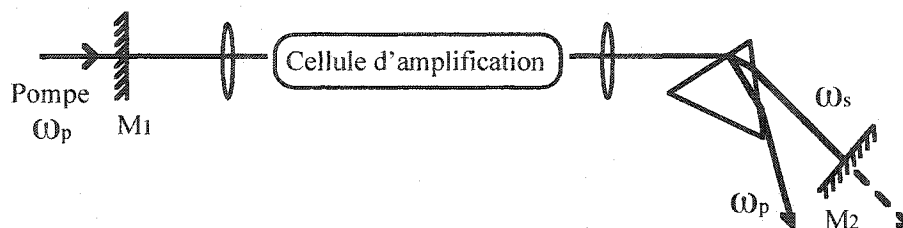


Figure 2 : Schéma d'un laser Raman. La pompe à  $\omega_p$  est convertie dans la cellule par effet Raman en une onde de Stokes aux fréquences  $\omega_s$ . Le prisme permet de séparer les différentes raies Stokes. La puissance peut être cascadée d'une fréquence à l'autre si les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  peuvent réfléchir les différentes ondes de Stokes.

puissance optique (grâce à leurs faibles pertes) avant d'être détruites, en plus d'être chimiquement neutres. Le principal avantage de la fibre optique comme milieu de gain Raman provient du confinement optique. Toute la puissance optique dans la fibre est confinée sur quelques dizaines de microns carrés ( $<100 \mu\text{m}^2$ ) sur toute la longueur de la fibre, contrairement aux faisceaux gaussiens qui ne le sont que sur la zone de Rayleigh. Un autre avantage de la fibre optique vient du fait que le verre est un milieu amorphe ; il existe un continuum de modes vibrationnels, ce qui permet un meilleur ajustement des fréquences. La largeur du spectre Raman dans le verre est de 40 THz avec un maximum à 13,2 THz, donc un décalage beaucoup plus faible que dans l'hydrogène. Le principal désavantage est le couplage dans la fibre. Les miroirs et le prisme n'étant pas fibrés, il y a beaucoup de pertes dues au couplage à l'entrée et à la sortie de la fibre.

Il faut attendre jusqu'en 1994 pour voir apparaître un nouveau design de lasers Raman [Grubb, Erdogan & Becker 1993]. Dans ce design, les miroirs sont remplacés par leurs équivalents tout-fibre : les coupleurs multiplexeurs en longueurs d'onde et les réseaux de Bragg. Les coupleurs sont faits de deux fibres qui sont chauffées et étirées. Il est ainsi possible de séparer les longueurs d'onde qui entrent par une fibre mais sortent par une des deux sorties. Les réseaux de Bragg tout-fibre sont faits à partir d'une fibre optique photosensible à l'ultraviolet. Une modulation d'indice

est créée le long de la fibre à l'aide d'un laser UV et d'un masque de phase qui détermine le pas du réseau. Le réseau est un filtre réflecteur étroit spectralement (quelques nanomètres). Les coefficients de réflexion obtenus pour une longueur d'onde donnée peuvent être aussi élevés que 99,999% (-50 dB). Les réseaux de Bragg dans les fibres nous permettent d'avoir des miroirs tout-fibre, limitant les pertes de couplage à l'injection de la pompe dans la fibre. Les réseaux jouent également le rôle du prisme puisqu'ils permettent d'avoir une réflectivité différente pour chaque onde de Stokes. Il est donc maintenant facile de faire un laser Raman en cascades, en mettant des paires de réseaux de Bragg de part et d'autre de la fibre servant de milieu de gain. Des cavités Fabry-Perot emboîtées les unes dans les autres à différentes longueurs d'onde sont ainsi obtenues.

Parallèlement, de nouvelles sources lasers tout-fibre de haute puissance pouvant servir de pompe ont été développées. Notons en particulier des lasers à l'état solide dont le milieu de gain est une fibre de verre dopé. Ces lasers consistent en une série de diodes lasers qui sont injectées dans une fibre dopée aux terres rares. Individuellement, ces diodes ne sont pas très puissantes (quelques milli-Watts) mais ensemble elles génèrent plusieurs Watts. Ces diodes servent à exciter les ions de terres rares qui, en se désexcitant, génèrent la raie laser. Les terres rares les plus utilisées sont l'erbium (1,55  $\mu\text{m}$ ), l'ytterbium (1,01 à 1,61  $\mu\text{m}$ ) et le néodyme (0,92, 1,06 ou 1,35  $\mu\text{m}$ ). La principale difficulté dans le design de ces lasers est de coupler une très grande quantité de puissance optique dans la fibre sans pertes. De faibles pertes (consistant en la puissance optique non-guidée) à ces puissances sont suffisantes pour détruire la fibre. Ces lasers peuvent générer des puissances de sortie très élevées (plus de 100 W) confinées sur quelques dizaines de microns carrés à des longueurs d'onde comprises entre 0,4 et 4  $\mu\text{m}$  avec une efficacité d'environ 50%. La sortie étant fibrée, il est facile d'injecter la lumière dans une fibre optique avec un minimum de pertes. Toutefois, puisque le milieu de gain est très long (plusieurs mètres), il y a beaucoup de bruit créé par l'amplification de l'émission spontanée.

Avec un laser de pompe à fibre dopée aux terres rares et avec les réseaux de Bragg dans les fibres optiques, il est possible de construire un laser Raman tout-fibre en cascades comme montré à la Fig. 3. L'avantage d'un laser tout-fibre par rapport aux

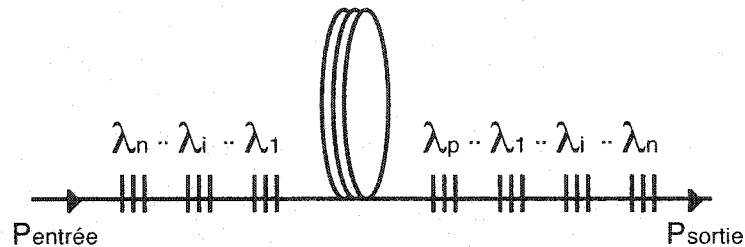


Figure 3 : Laser Raman tout-fibre en cascades. Les cavités Fabry-Perot sont formées de paires de réseaux de Bragg. Le laser de pompe est un laser à fibre dopée aux terres rares.

autres types de lasers est la stabilité puisqu'il n'y a aucun ajustement ou entretien à faire. Les lasers tout-fibre sont relativement compacts compte-tenu de la puissance qu'ils génèrent car la fibre peut être enroulée sur elle-même. Le mode transverse est généralement très pur (laser unimodal avec peu de bruit) puisque c'est le mode fondamental transverse de la fibre. Le principal avantage des lasers Raman tout-fibre est qu'ils peuvent être conçus pour émettre sur n'importe quelle longueur d'onde guidée par la fibre optique (de 0,5 à 2  $\mu\text{m}$ ). Ils peuvent également émettre sur plusieurs longueurs d'onde *choisies* simultanément. Les puissances de sortie sont de quelques Watts avec un rendement de l'ordre de 50%. Le rendement net est moindre à cause du rendement du laser de pompe (et du rendement des diodes lasers qui pompent le laser de pompe). La nature de l'interaction Raman fait en sorte que le bruit du laser est faible.

Les lasers Raman tout-fibre ont depuis quelques années suscité l'intérêt dans le domaine des télécommunications par fibres optiques comme source pour pomper les amplificateurs. La transmission sur de longues distances requiert l'amplification

périodique du signal à l'aide d'amplificateurs. Les amplificateurs couramment utilisés sont des amplificateurs à l'erbium ou des amplificateurs Raman. Les amplificateurs à l'erbium sont pompés par des lasers de haute puissance à la longueur d'onde  $0,98 \mu\text{m}$  ou  $1,48 \mu\text{m}$  ; des séries de lasers à semi-conducteurs sont souvent utilisées pour faire le pompage. La courbe de gain de l'erbium est suffisamment large pour couvrir toute la bande spectrale des télécommunications (bande S de 1460 à 1530 nm, bande C de 1530 à 1560 nm et bande L de 1560 à 1625 nm). L'erbium ne peut toutefois pas être utilisé pour amplifier à  $1,3 \mu\text{m}$  (autour du zéro de dispersion de la silice). L'amplification Raman [Morita, Tanaka & Edagawa 2001] a l'avantage de pouvoir amplifier des signaux à n'importe quelle fréquence guidée par la fibre. De plus, ils sont plus fiables aux niveaux optique et mécanique que les verres fluorés dopés au praséodyme qui sont utilisés pour amplifier autour de  $1,3 \mu\text{m}$ . L'amplification Raman a aussi l'avantage de pouvoir faire un pompage contra-directionnel ; l'amplification est alors plus forte où le signal a été le plus atténué par l'absorption de la fibre. En général, les deux sortes d'amplificateurs (erbium et Raman) sont utilisés ensemble dans les réseaux de télécommunications.

Les sources pour pomper les amplificateurs Raman sont toutefois plus difficiles à trouver car les longueurs d'onde de pompage dépendent des longueurs d'onde des signaux. Les lasers Raman sont donc idéaux pour pomper les amplificateurs Raman (et à l'erbium) à cause de leur accordabilité spectrale et leur haute puissance de sortie. Du fait qu'ils peuvent être construits pour opérer sur plusieurs fréquences [de Matos, Chestnut & Taylor 2001], un seul laser peut pomper plusieurs amplificateurs. De nouvelles fibres dopées au phosphore ont été élaborées pour augmenter le décalage Raman augmentant ainsi l'efficacité [Dianov, Grekov, Bufetov & Pokhorov 1997] de la cascade. Récemment, des modèles ont été proposés et résolus numériquement afin de déterminer le comportement des lasers Raman tout-fibre en cascades [Jackson & Muir 2001], [Rini, Cristiani & Degiorgio 2000], [Cierullies, Renner & Brinkmeyer 2003]. Des modèles analytiques très approximatifs ont également été proposés [Bufetov & Dianov

2000].

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous proposons une solution analytique approximative à ce problème, beaucoup plus précise que celle de la référence précédente. La solution nous permet de bien comprendre la physique du laser Raman en régime continu. Nous optimisons par la suite les différents paramètres du laser (longueur de cavité, puissance de pompe, etc.) afin d'obtenir le meilleur rendement, la grande puissance de sortie et la puissance de seuil la plus basse possible. Nous trouvons ensuite des lois d'invariance plus générales que celles trouvées précédemment [Renner, Cierullis & Krause 2003]. La dernière partie du premier chapitre est consacrée à l'étude du régime transitoire du laser Raman en cascades. Pour la première fois à notre connaissance, le régime transitoire du laser (entre le moment où on le met en marche et où il atteint son régime d'opération continu stable) est numériquement étudié. Cela nous permet de déterminer le temps de stabilisation du laser et de mieux comprendre la dynamique du gain Raman.

Nous analysons la stabilité du laser Raman dans le deuxième chapitre afin de déterminer si le régime continu amplifie les perturbations. L'analyse est toutefois faite sur une cavité en anneau afin de simplifier le problème et de mieux en tirer la physique. Nous commençons par déduire à partir des équations couplées les équations perturbées de propagation décrivant le laser. L'analyse nous permet de déterminer à partir d'une solution stationnaire, les fréquences des perturbations ainsi que leur gain relatif. L'influence de la variation de la puissance dans la cavité (due à l'appauvrissement de la pompe et à l'amplification de la raie laser) sur les perturbations est étudiée pour la première fois à notre connaissance. Nous voyons aussi comment ces variations de puissance créent des perturbations supplémentaires. Notre méthode d'analyse nous permet de déterminer si l'amplification des perturbations permet de faire auto-pulser le laser.

Il est à noter que le détail du calcul menant aux équations du laser Raman à partir des équations de Maxwell a été mis en annexe.



# Chapitre 1

## Laser Raman

Dans ce chapitre, nous définissons le système d'équations régissant le laser Raman ainsi que les méthodes numériques utilisées pour en faire la résolution en régime transitoire et en régime continu. Nous résolvons également le système d'équations analytiquement en régime continu, ce qui nous permet d'optimiser les paramètres du laser. Finalement l'analyse du régime transitoire nous renseigne sur la dynamique du laser.

### 1.1 Configuration du laser

#### 1.1.1 Schéma du laser

Le laser considéré a une configuration linéaire comme montré à la figure 1.1. Les réflecteurs sont constitués de réseaux de Bragg, supposés suffisamment étroits pour utiliser l'approximation monochromatique mais suffisamment larges pour qu'il n'y ait pas de diffusion Brillouin stimulée. La pompe est injectée par une extrémité de la cavité et se convertit en onde de Stokes par diffusion Raman stimulée avec la propagation. Les réseaux de Bragg les plus intérieurs sont ajustés à la longueur d'onde de cette onde de Stokes pour avoir une résonance. Il est intéressant de noter que, puisque la courbe de gain Raman est large (40 THz), nous avons un grand

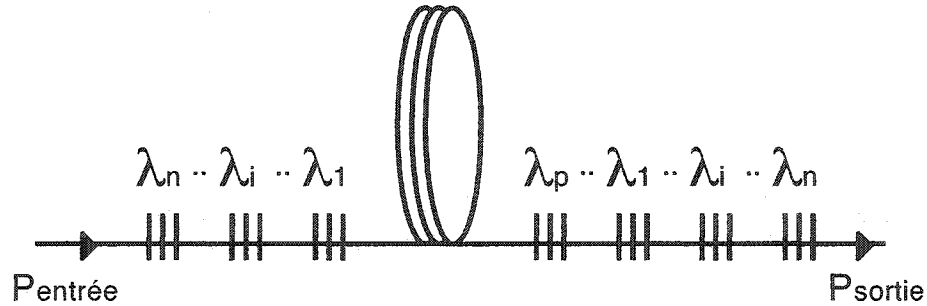


Figure 1.1 : Cavité Raman linéaire; les paires de réflecteurs sont emboîtées les uns dans les autres pour former la cascade. La pompe est réfléchie par un seul réflecteur.

choix de longueurs d'onde que nous pouvons faire résonner; le maximum de gain se trouve cependant à un décalage de 13,2 THz (par rapport à la pompe) dans les fibres standard (voir figure B.1, page 89).

L'onde de Stokes ainsi générée sert de pompe à une deuxième onde de Stokes qui résonne avec le deuxième ensemble de réseaux de Bragg. Nous pouvons continuer la cascade jusqu'à ce que la dernière onde de Stokes soit à la longueur d'onde voulue. Puisque la courbe de gain Raman est large, il est possible de changer la longueur d'onde de résonance d'une onde de Stokes en modifiant la longueur d'onde de résonance des réseaux de Bragg. Nous avons ainsi deux mécanismes pour ajuster la longueur d'onde du laser : déplacer la longueur d'onde du réseau de Bragg pour un ajustement fin et faire cascader la puissance d'une onde de Stokes à l'autre pour un plus grand déplacement en longueur d'onde.

### 1.1.2  quations du laser en cascades

Dans l'annexe B, nous dérivons les équations décrivant le pompage Raman dans le cas quasi-continu (B.81) et (B.82). Pour déterminer les équations régissant la cascade, il suffit d'ajouter un terme d'appauvrissement à chaque onde de Stokes puisque cha-

cune d'elles sert de pompe à la suivante (sauf la dernière évidemment). Nous devons également considérer le fait que les champs se déplacent dans deux directions ( $\pm z$ ). Pour ce faire, il suffit de remplacer  $z$  par  $-z$  dans les équations (B.81) et (B.82) et de faire la somme des champs contradirectionnels. Nous obtenons ainsi pour  $n$  ondes de Stokes :

$$\frac{\partial P_0^\pm(z, t)}{\partial z} \pm \beta_{1,0} \frac{\partial P_0^\pm(z, t)}{\partial t} = \mp g_0 \left[ P_1^+(z, t) + P_1^-(z, t) \right] P_0^\pm(z, t) \mp \alpha_0 P_0^\pm(z, t) \quad (1.1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_j^\pm(z, t)}{\partial z} \pm \beta_{1,j} \frac{\partial P_j^\pm(z, t)}{\partial t} &= \pm g_j \left[ P_{j-1}^+(z, t) + P_{j-1}^-(z, t) \right] P_j^\pm(z, t) \\ &\mp g_j \left[ P_{j+1}^+(z, t) + P_{j+1}^-(z, t) \right] P_j^\pm(z, t) \mp \alpha_j P_j^\pm(z, t) \end{aligned} \quad (1.1b)$$

pour  $j = 1$  à  $n - 1$  et pour la dernière onde :

$$\frac{\partial P_n^\pm(z, t)}{\partial z} \pm \beta_{1,n} \frac{\partial P_n^\pm(z, t)}{\partial t} = \pm g_n \left[ P_{n-1}^+(z, t) + P_{n-1}^-(z, t) \right] P_n^\pm(z, t) \mp \alpha_n P_n^\pm(z, t) \quad (1.1c)$$

où  $P_j^\pm$  représente la puissance de la  $j$ ième onde de Stokes se déplaçant selon  $\pm z$ ,  $P_0^\pm$  la puissance pompe,  $\alpha_j$  l'absorption,  $g_j$  le gain Raman et  $\beta_{1,j}$  l'inverse de la vitesse de groupe. Le système est le même que celui trouvé dans la littérature [Jackson & Muir 2001]. Dans le cas continu, nous pouvons annuler la dérivée temporelle de sorte que :

$$\frac{dP_0^\pm(z)}{dz} = \mp g_0 \left[ P_1^+(z) + P_1^-(z) \right] P_0^\pm(z) \mp \alpha_0 P_0^\pm(z) \quad (1.2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_j^\pm(z)}{dz} &= \pm g_j \left[ P_{j-1}^+(z) + P_{j-1}^-(z) \right] P_j^\pm(z) \\ &\mp g_j \left[ P_{j+1}^+(z) + P_{j+1}^-(z) \right] P_j^\pm(z) \mp \alpha_j P_j^\pm(z) \end{aligned} \quad (1.2b)$$

pour  $j = 1$  à  $n - 1$

$$\frac{dP_n^\pm(z)}{dz} = \pm g_n \left[ P_{n-1}^+(z) + P_{n-1}^-(z) \right] P_n^\pm(z) \mp \alpha_n P_n^\pm(z) \quad (1.2c)$$

Les équations (1.2a)–(1.2c) nous permettent de déterminer le régime permanent du laser [Vareille, Audouin & Desurvire 1998], [Bertoni & Reali 1998].

### 1.1.3 Conditions aux frontières

Les puissances contradirectionnelles d’une même onde de Stokes sont couplées entre elles par les réflecteurs (réseaux de Bragg). Dans la cavité, le seul apport d’énergie se fait par l’injection de la pompe; il n’y a pas d’injection dans les ondes de Stokes. Considérant que la cavité a une longueur  $L$ , les conditions aux frontières s’écrivent :

$$\begin{aligned} P_0^+(0) &= P_{\text{in}} & P_0^-(L) &= R_0^+ P_0^+(L) \\ P_j^+(0) &= R_j^- P_j^-(0) & P_j^-(L) &= R_j^+ P_j^+(L) \end{aligned} \quad (1.3)$$

avec  $0 < j \leq n$ , où  $R_j$  est la réflectivité du réseau de Bragg à la longueur d’onde de la  $j$ ème Stokes; l’exposant  $+$  signifie que le réseau est du côté de la sortie de la cavité (à droite dans la figure 1.1). L’exposant  $-$  veut dire que le réflecteur est à gauche.  $P_{\text{in}}$  est la puissance injectée dans la cavité; elle peut varier avec le temps.

## 1.2 Simulation du régime continu

Dans cette section, nous allons résoudre les équations (1.2a)–(1.2c) pour déterminer le régime continu du laser avec les conditions (1.3). Le problème est schématisé à la figure 1.2. Nous supposons que tous les réflecteurs sont ponctuels (leur longueur est de quelques millimètres) et sont situés en  $z = 0$  et  $z = L$ .

### 1.2.1 Méthode numérique

Le problème à résoudre est un système d’équations différentielles non-linéaires avec conditions aux limites. Pour résoudre ce genre de problème, il est courant

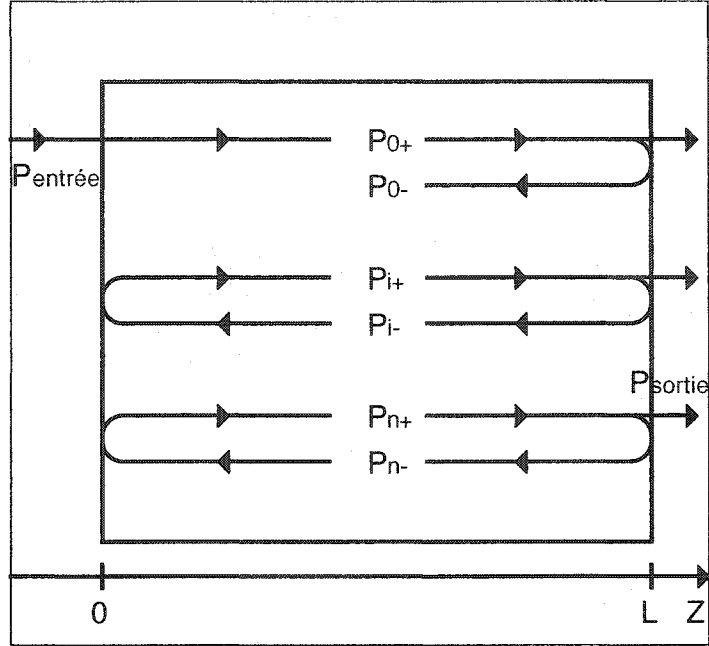


Figure 1.2 : Définition du problème en régime continu ;  $P_j^\pm$  représente la puissance de la  $j$ ème ondes de Stokes se propageant vers  $\pm z$ .

d'utiliser la méthode de tir [Vareille *et al.* 1998], [Hu, Marks, Zhang & Menyuk 2003]. La méthode se fait en deux étapes. La première étape consiste à donner une valeur arbitraire  $\vec{v}$  au vecteur des variables en  $z = 0$ , à intégrer le système avec un intégrateur (typiquement Runge-Kutta d'ordre 4 à pas variable) et à calculer l'erreur  $\xi$  en  $z = L$  par rapport aux conditions aux limites. Ceci peut être considéré comme une fonction  $\xi = f(\vec{v})$  dont nous devons trouver les zéros (aucune erreur). La deuxième étape consiste à trouver les zéros d'une fonction non-linéaire à plusieurs variables; des variantes de l'algorithme de Newton sont habituellement utilisées. Les algorithmes utilisés proviennent de [Press, Teukolsky, Vetterling & Flannery 1992].

La difficulté avec les méthodes de tir est de déterminer  $\vec{v}$  de sorte que l'intégration ne diverge pas ( $\xi \neq \infty$ ) et qu'il soit possible de déterminer les zéros de  $f(\vec{v})$ . Pour

remédier à ce problème, il suffit de faire varier les constantes du système (longueur de la cavité, puissance injectée, etc.) jusqu'à ce qu'une solution valable soit obtenue. À partir de cette solution, on recalcule successivement le système en changeant légèrement les constantes d'un calcul à l'autre en prenant le résultat précédent comme  $\vec{v}$ , jusqu'à ce que nous ayons les constantes voulues. C'est la méthode de la continuité.

### 1.2.2 Puissance intracavité

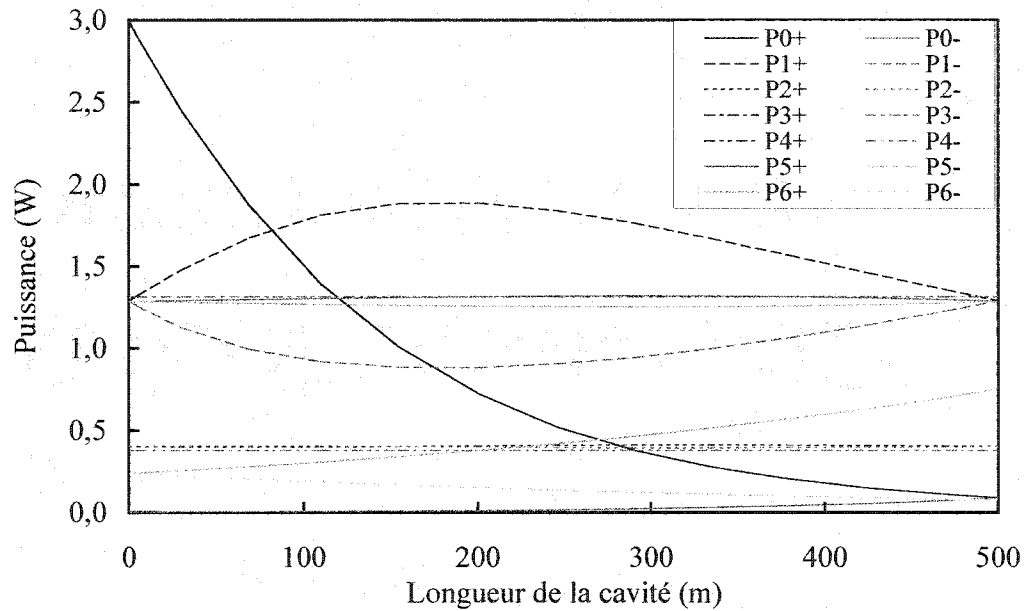


Figure 1.3 : Simulation de la puissance de chacune des ondes de Stokes en fonction de  $z$  pour une longueur de cavité  $L = 500$  m, une puissance d'injection  $P_m = 3$  W, des réflecteurs  $R_j = 0,967$  et un réflecteur de sortie  $R_6^+ = 0,1$ . Les courbes en trait plein représentent la puissance  $P_j^+$  se déplaçant vers  $+z$  tandis que les courbes en traits pointillés représentent  $P_j^-$  la puissance allant vers  $-z$ . Le détail de ces courbes est donné aux figures (1.4).

Examinons la puissance à l'intérieur de la cavité. La figure (1.3) nous montre la puissance à l'intérieur de la cavité pour une cascade de 6 ondes de Stokes. Les figures (1.4) nous montrent individuellement la puissance de chacune des ondes de Stokes.

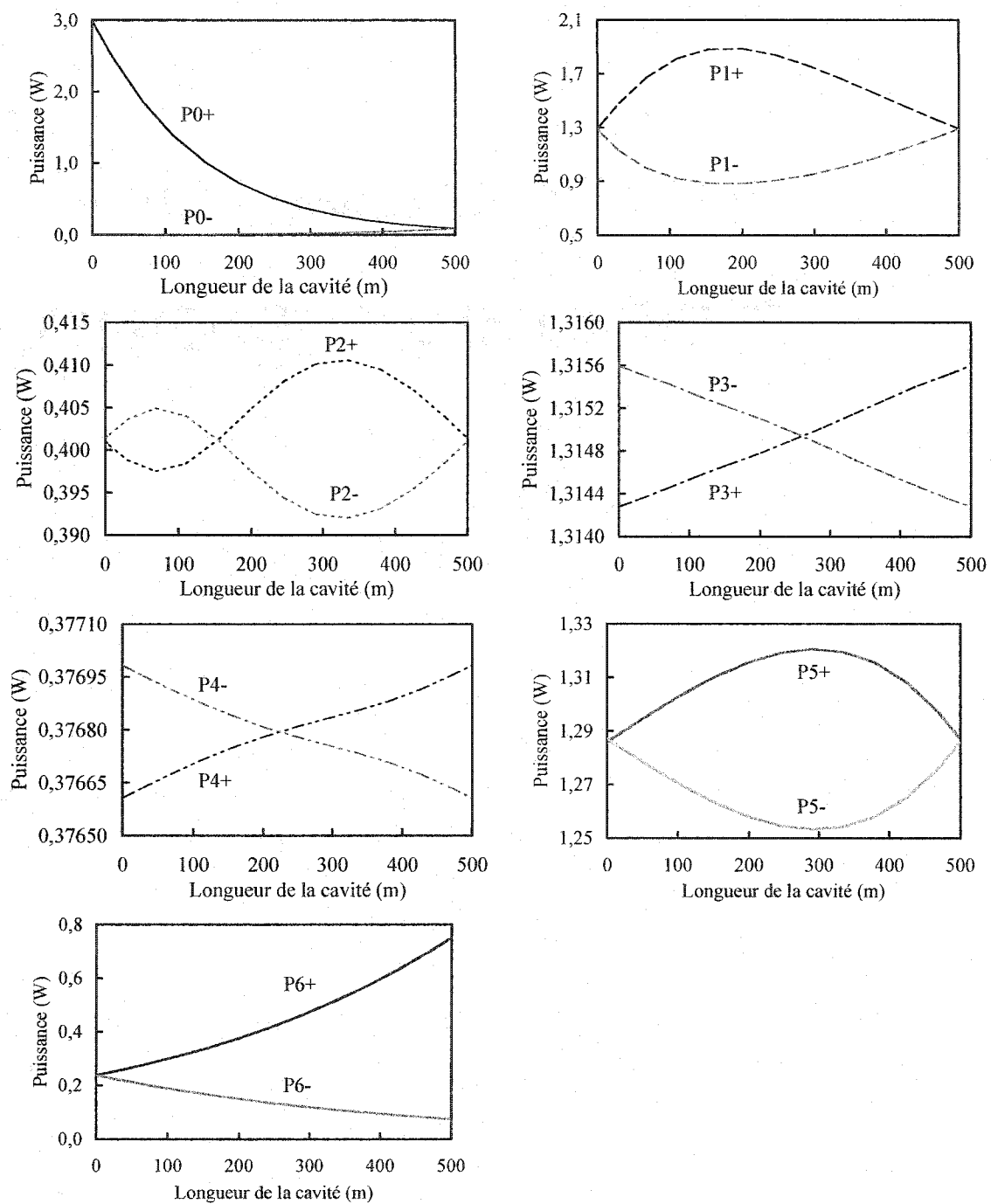


Figure 1.4 : Vue en détail des puissances des différentes ondes de Stokes dans la cavité.

Les résultats se comparent à ceux de la littérature [Jackson & Muir 2001],[Vareille *et al.* 1998]. En considérant comme pompe un laser à fibre dopée à l'ytterbium ( $1,06 \mu\text{m}$ ) et un décalage Raman dans la silice de  $440 \text{ cm}^{-1}$  ( $13,2 \text{ THz}$ ), nous obtenons une longueur d'onde de sortie (pour la 6<sup>ième</sup> onde de Stokes) de  $1,48 \mu\text{m}$  : c'est la longueur d'onde de pompe de l'erbium. Les coefficients de gain varient de  $0,00258$  à  $0,00106 \text{ m}^{-1}\text{W}^{-1}$  selon l'équation (B.75).

La pompe et la dernière Stokes ont un comportement quasi-exponentiel, suggérant que leur gain est constant. La première et l'avant-dernière Stokes ont toutefois un gain non constant en  $z$ . Les autres ondes de Stokes (de 2 à 5) varient très peu, leur gain total étant presque nul. Cela signifie que l'onde donne autant de puissance qu'elle en reçoit à chaque  $z$ . Ces observations nous permettent de considérer une solution analytique approximative au système.

## 1.3 Résolution analytique du régime continu

### 1.3.1 Définition

Le système d'équations (1.2a)-(1.2c) régissant le fonctionnement d'un laser Raman tout-fibre en cascades s'écrit encore, en omettant d'écrire la dépendance en  $z$  des variables pour plus de clarté :

$$\frac{1}{P_0^+} \frac{dP_0^+}{dz} = -\frac{1}{P_0^-} \frac{dP_0^-}{dz} = -g_0(P_1^+ + P_1^-) - \alpha_0 \quad (1.4a)$$

$$\frac{1}{P_j^+} \frac{dP_j^+}{dz} = -\frac{1}{P_j^-} \frac{dP_j^-}{dz} = -g_j(P_{j+1}^+ + P_{j+1}^-) + g_j(P_{j-1}^+ + P_{j-1}^-) - \alpha_j \quad (1.4b)$$

$$\frac{1}{P_n^+} \frac{dP_n^+}{dz} = -\frac{1}{P_n^-} \frac{dP_n^-}{dz} = g_n(P_{n-1}^+ + P_{n-1}^-) - \alpha_n \quad (1.4c)$$

pour un laser à  $n$  cascades (et donc  $n$  ondes de Stokes) et avec les conditions aux frontières suivantes :



En $z = 0$	En $z = L$
$P_0^+ = P_{\text{in}}$	$P_0^- = R_0^+ P_0^+$
$P_j^+ = R_j^- P_j^-$	$P_j^- = R_j^+ P_j^+$

### 1.3.2 Résolution

Nous pouvons déduire à partir de (1.4a)-(1.4c) que :

$$\frac{1}{P_j^+} \frac{dP_j^+}{dz} = -\frac{1}{P_j^-} \frac{dP_j^-}{dz} \Rightarrow P_j^+ P_j^- = C_j^2 \quad (1.5)$$

où  $C_j$  est constant. Proposons le changement de variables suivant :

$$P_j^+ = C_j e^{\theta_j} \quad P_j^- = C_j e^{-\theta_j} \quad (1.6)$$

La variable  $\theta_j$  représente un facteur d'amplification de la  $j$ ième onde de Stokes. Le système se réécrit :

$$\frac{d\theta_0}{dz} = -2g_0 C_1 \cosh \theta_1 - \alpha_0 \quad (1.7a)$$

$$\frac{d\theta_j}{dz} = -2g_j C_{j+1} \cosh \theta_{j+1} + 2g_j C_{j-1} \cosh \theta_{j-1} - \alpha_j \quad (1.7b)$$

$$\frac{d\theta_n}{dz} = 2g_n C_{n-1} \cosh \theta_{n-1} - \alpha_n \quad (1.7c)$$

Les conditions aux limites deviennent :

En $z = 0$	En $z = L$
$\theta_0 = \ln \left( \frac{P_{\text{in}}}{C_0} \right)$	$\theta_0 = -\ln \sqrt{R_0^+}$
$\theta_j = \ln \sqrt{R_j^-}$	$\theta_j = -\ln \sqrt{R_j^+}$

Les coefficients  $C_j$  nous permettent à eux seuls de caractériser le laser. En prenant l'équation (1.5) en  $z = 0$ , nous déduisons que :

$$P_0^- = \frac{C_0^2}{P_{\text{in}}} \quad (1.8)$$

Il est clair que plus  $C_0$  est faible, plus le retour de la pompe  $P_0^-$  est petit et donc plus la pompe a bien été appauvrie sur un aller ; l'appauvrissement de la pompe est donc directement relié à  $C_0$ . En écrivant la puissance de sortie du laser comme suit :

$$P_{\text{sortie}} = (1 - R_n^+)P_n^+|_{z=L} = (1 - R_n^+)C_n \exp(\theta_n|_{z=L}) = \frac{(1 - R_n^+)C_n}{\sqrt{R_n^+}}$$

nous constatons qu'elle est entièrement caractérisée par  $C_n$ . Il est également intéressant, de calculer la différence entre les puissances contra-directionnelles en fonction de  $\theta_j$ .

$$\Delta P_j = P_j^+ - P_j^- = C_j e^{\theta_j} - C_j e^{-\theta_j} = 2C_j \sinh \theta_j \quad (1.9)$$

Avec les conditions aux limites, nous voyons que si les réflecteurs sont presque parfaits  $R_j^\pm \approx 1$ , nous avons  $\theta_j \approx 0$  et donc  $\Delta P_j \approx 0$  aux extrémités. Dans ce cas, la puissance  $P_j^\pm$  vaut  $C_j$ . Pour résoudre le problème, il nous suffit donc de déterminer les coefficients  $C_j$ . Pour ce faire, faisons le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_0 &= \theta_0 - \frac{(L-z)}{L} \ln \left( \frac{P_{\text{in}}}{C_0} \right) + \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_0^+} \\ \tilde{\theta}_j &= \theta_j - \frac{(L-z)}{L} \ln \sqrt{R_j^-} + \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_j^+} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ce changement de variables correspond physiquement à une distribution linéaire des pertes des réflecteurs (ainsi que de l'injection) sur toute la longueur de la cavité. Cette distribution est bonne en autant que le terme distribué,  $\ln \sqrt{R_j^\pm}$ , est faible, ce

qui est généralement le cas car  $R_j^\pm \approx 1$ . Le système (1.7a)-(1.7c) se réécrit :

$$\frac{d\tilde{\theta}_0}{dz} = -2g_0C_1 \cosh \left[ \tilde{\theta}_1 - \frac{(L-z)}{L} \ln \sqrt{R_1^-} + \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_1^+} \right] - \alpha_0 + \frac{1}{L} \ln \left( \frac{P_{in} \sqrt{R_0^+}}{C_0} \right) \quad (1.11a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}_1}{dz} = & -2g_1C_2 \cosh \left[ \tilde{\theta}_2 - \frac{(L-z)}{L} \ln \sqrt{R_2^-} + \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_2^+} \right] \\ & + 2g_1C_0 \cosh \left[ \tilde{\theta}_0 - \frac{(L-z)}{L} \ln \left( \frac{P_{in}}{C_0} \right) + \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_0^+} \right] - \alpha_1 + \frac{\ln(R_1^- R_1^+)}{2L} \end{aligned} \quad (1.11b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}_j}{dz} = & -2g_jC_{j+1} \cosh \left[ \tilde{\theta}_{j+1} - \frac{(L-z)}{L} \ln \sqrt{R_{j+1}^-} + \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_{j+1}^+} \right] \\ & + 2g_jC_{j-1} \cosh \left[ \tilde{\theta}_{j-1} - \frac{(L-z)}{L} \ln \sqrt{R_{j-1}^-} + \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_{j-1}^+} \right] - \alpha_j + \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{2L} \end{aligned} \quad (1.11c)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_n}{dz} = 2g_nC_{n-1} \cosh \left[ \tilde{\theta}_{n-1} - \frac{(L-z)}{L} \ln \sqrt{R_{n-1}^-} + \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_{n-1}^+} \right] - \alpha_n + \frac{\ln(R_n^- R_n^+)}{2L} \quad (1.11d)$$

avec les conditions aux limites :

En $z = 0$	En $z = L$
$\tilde{\theta}_0 = 0$	$\theta_0 = 0$
$\tilde{\theta}_j = 0$	$\theta_j = 0$

En première approximation, nous pouvons supposer que, pour toutes les ondes de Stokes sauf la pompe et la dernière onde de Stokes, toute la puissance reçue de l'onde précédente sur une tranche  $dz$  est envoyée dans la suivante. Cela consiste à supposer les dérivées constantes et équivaut à faire un développement limité à l'ordre 1 sur  $\theta_j$  pour  $0 < j < n$ . Ce développement ne s'applique pas à la pompe car il y a une injection constante de puissance qui ne correspond pas nécessairement aux taux d'appauvrissement dans la première onde de Stokes. Pour la dernière onde de Stokes,

la puissance est perdue par le dernier réseau de Bragg qui est semi-réfléchissant. Nous en déduisons donc que :

$$\cosh \theta_j \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_j \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\theta}_j \approx \frac{(L-z)}{L} \ln \sqrt{R_j^-} - \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_j^+} \quad (1.12)$$

pour  $0 < j < n$  quel que soit  $z$  puisque le développement en série de Taylor du cosinus hyperbolique ne contient pas de termes linéaires. Cela revient à écrire la condition d'opération laser «gain = perte». Il s'ensuit que :

$$\frac{d\tilde{\theta}_0}{dz} = -2g_0C_1 - \alpha_0 + \frac{1}{L} \ln \left( \frac{P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+}}{C_0} \right) \quad (1.13a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}_1}{dz} = & -2g_1C_2 + 2g_1C_0 \cosh \left[ \tilde{\theta}_0 - \frac{(L-z)}{L} \ln \left( \frac{P_{\text{in}}}{C_0} \right) + \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_0^+} \right] \\ & - \alpha_1 + \frac{\ln(R_1^- R_1^+)}{2L} \end{aligned} \quad (1.13b)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_j}{dz} = -2g_jC_{j+1} + 2g_jC_{j-1} - \alpha_j + \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{2L} \quad (1.13c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}_{n-1}}{dz} = & -2g_{n-1}C_n \cosh \left[ \tilde{\theta}_n - \frac{(L-z)}{L} \ln \sqrt{R_n^-} + \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_n^+} \right] \\ & + 2g_{n-1}C_{n-2} - \alpha_{n-1} + \frac{\ln(R_{n-1}^- R_{n-1}^+)}{2L} \end{aligned} \quad (1.13d)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_n}{dz} = 2g_nC_{n-1} - \alpha_n + \frac{\ln(R_n^- R_n^+)}{2L} \quad (1.13e)$$

Les conditions aux limites imposent que  $\tilde{\theta}_i = 0$  aux deux extrémités ; puisque les  $\tilde{\theta}_i$  sont linéaires pour  $\{0 \leq j \leq n\} - \{1, n-1\}$ , nous avons :

$$\frac{d\tilde{\theta}_j}{dz} = 0 \quad \text{pour} \quad \{0 \leq j \leq n\} - \{1, n-1\} \quad (1.14)$$

Nous ne pouvons poser (1.14) pour  $j \in \{1, n-1\}$ , car la première onde de Stokes dépend de la pompe et l'avant dernière dépend de la dernière, pour lesquelles (1.12) ne s'applique pas. Nous trouvons donc ainsi les relations suivantes entre les con-

stantes  $C_j$  :

$$C_1 = -\frac{\alpha_0}{2g_0} + \frac{1}{2g_0 L} \ln \left( \frac{P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+}}{C_0} \right) \quad (1.15)$$

$$C_{j+1} = C_{j-1} - \frac{\alpha_j}{2g_j} + \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \quad (1.16)$$

pour  $1 < j < n-1$

$$C_{n-1} = \frac{\alpha_n}{2g_n} - \frac{\ln(R_n^- R_n^+)}{4g_n L} \quad (1.17)$$

Ces relations ne permettent malheureusement pas de déterminer les valeurs de toutes les constantes. Nous pouvons toutefois résoudre maintenant (1.13a) et donc (1.13b).

$$\frac{d\tilde{\theta}_0}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\theta}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \frac{(L-z)}{L} \ln \left( \frac{P_{\text{in}}}{C_0} \right) - \frac{z}{L} \ln \sqrt{R_0^+} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}_1}{dz} &= -2g_1 C_2 + 2g_1 C_0 \cosh \left[ -\frac{z}{L} \ln \left( \frac{P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+}}{C_0} \right) + \ln \left( \frac{P_{\text{in}}}{C_0} \right) \right] \\ &\quad - \alpha_1 + \frac{\ln(R_1^- R_1^+)}{2L} \\ \Rightarrow \quad \tilde{\theta}_1 + K &= \left[ -2g_1 C_2 - \alpha_1 + \frac{\ln(R_1^- R_1^+)}{2L} \right] z \\ &\quad - \frac{2g_1 C_0 L}{\ln \left( \frac{P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+}}{C_0} \right)} \sinh \left[ -\frac{z}{L} \ln \left( \frac{P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+}}{C_0} \right) + \ln \left( \frac{P_{\text{in}}}{C_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.19)$$

où les conditions aux limites imposent  $\tilde{\theta}_0 = 0$  et  $z = 0$  et  $z = L$ . La constante d'intégration  $K$  doit être la même en  $z = 0$  et en  $z = L$ . Ainsi,

$$-\frac{2g_1 C_0 L \sinh \left[ \ln \left( \frac{P_{\text{in}}}{C_0} \right) \right]}{\ln \left( \frac{P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+}}{C_0} \right)} = (-2g_1 C_2 - \alpha_1) L + \ln \sqrt{R_1^- R_1^+} + \frac{2g_1 C_0 L \sinh \left[ \ln \sqrt{R_0^+} \right]}{\ln \left( \frac{P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+}}{C_0} \right)} \quad (1.20)$$

d'où,

$$C_2 = -\frac{\alpha_1}{2g_1} + \frac{\ln(R_1^- R_1^+)}{4g_1 L} + C_0 \frac{\sinh \left[ \ln \sqrt{R_0^+} \right] + \sinh \left[ \ln \left( \frac{P_{\text{in}}}{C_0} \right) \right]}{\ln \left( \frac{P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+}}{C_0} \right)} \quad (1.21)$$

Il est possible de simplifier davantage (1.21), en remarquant, d'une part, que le terme en  $\sinh \left[ \ln \sqrt{R_0^+} \right]$  est négligeable devant  $\sinh \left[ \ln \left( \frac{P_{\text{in}}}{C_0} \right) \right]$  et que, d'autre part, puisque  $\frac{P_{\text{in}}}{C_0} \gg 1$ , nous ne considérons que la partie exponentielle croissante du sinus hyperbolique. Nous obtenons une nouvelle expression où  $C_0$  peut être isolé :

$$C_0 = P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+} \exp \left[ - \frac{P_{\text{in}}}{2 \left( C_2 + \frac{\alpha_1}{2g_1} - \frac{\ln(R_1^- R_1^+)}{4g_1 L} \right)} \right] \quad (1.22)$$

En procédant de la même manière pour (1.13d), nous trouvons :

$$C_{n-2} = \frac{\alpha_{n-1}}{2g_{n-1}} - \frac{\ln(R_{n-1}^- R_{n-1}^+)}{4g_{n-1} L} + C_n \frac{\sinh \left[ \ln \sqrt{R_n^+} \right] + \sinh \left[ \ln \sqrt{R_n^-} \right]}{\ln \sqrt{R_n^+ R_n^-}} \quad (1.23)$$

Il est maintenant possible de déterminer les constantes  $C_j$ . Il faut toutefois considérer deux cas selon que  $n$  est pair ou impair.

#### 1. $n$ pair

Dans ce cas, nous utilisons (1.17) dans (1.16) en partant de  $j = n - 2$  jusqu'à  $j = 2$ , ce qui nous permet de trouver les  $C_i$  impairs et par (1.15),  $C_0$  :

$$C_1 = \sum_{j=2, j \text{ pair}}^n \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} = -\frac{\alpha_0}{2g_0} + \frac{1}{2g_0 L} \ln \left( \frac{P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+}}{C_0} \right) \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow C_0 = P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+} \exp \left\{ - \left( 2g_0 \sum_{j=2, j \text{ pair}}^n \left[ \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right] + \alpha_0 \right) L \right\} \quad (1.25)$$

En utilisant (1.21) ou (1.22) et de nouveau (1.16) et enfin (1.23), nous trouvons

les  $C_j$  pairs, et particulièrement  $C_n$  :

$$C_n = \left[ \frac{P_{\text{in}}}{4g_0 L \left( \sum_{j=2, j \text{ pair}}^n \left[ \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right] + \frac{\alpha_0}{2g_0} \right)} - \sum_{j=1, j \text{ impair}}^{n-1} \left[ \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right] \right] \times \left[ \frac{\ln \sqrt{R_n^+ R_n^-}}{\sinh \left( \ln \sqrt{R_n^+} \right) + \sinh \left( \ln \sqrt{R_n^-} \right)} \right] \quad (1.26)$$

## 2. $n$ impair

Nous utilisons encore (1.17) dans (1.16) en partant de  $j = n - 2$  jusqu'à  $j = 3$ , ce qui nous permet de trouver les  $C_j$  pairs et par (1.22),  $C_0$  :

$$C_2 = \sum_{j=3, j \text{ impair}}^n \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} = -\frac{\alpha_1}{2g_1} + \frac{\ln(R_1^- R_1^+)}{4g_1 L} + \frac{P_{\text{in}}}{2 \ln \left( \frac{P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+}}{C_0} \right)} \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow C_0 = P_{\text{in}} \sqrt{R_0^+} \exp \left[ - \frac{P_{\text{in}}}{2 \sum_{j=1, j \text{ impair}}^n \left[ \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right]} \right] \quad (1.28)$$

Avec (1.15), nous trouvons  $C_1$  ce qui nous permet de calculer tous les  $C_i$  impairs avec (1.16) et (1.23).  $C_n$  vaut ainsi :

$$C_n = \left[ \frac{P_{\text{in}}}{4g_0 L \sum_{j=1, j \text{ impair}}^n \left[ \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right]} - \sum_{j=2, j \text{ pair}}^{n-1} \left[ \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right] - \frac{\alpha_0}{2g_0} \right] \times \left[ \frac{\ln \sqrt{R_n^+ R_n^-}}{\sinh \left( \ln \sqrt{R_n^+} \right) + \sinh \left( \ln \sqrt{R_n^-} \right)} \right] \quad (1.29)$$

Nous avons maintenant déterminé tous les coefficients  $C_j$ . Le changement de variables (1.6) permet de retrouver les expressions de la puissance des ondes de Stokes et de la pompe dans la cavité.

### 1.3.3 Comparaison

Il est maintenant possible de comparer les simulations avec le calcul analytique. Considérons un laser à 6 cascades de 150 mètres avec des réflecteurs intermédiaires de 96,7%, un réflecteur de sortie de 10% et une injection de 6 Watts. Les caractéristiques de la fibre sont données au tableau 1.1. La figure 1.5 montre que les approximations du calcul théorique sont raisonnables puisque l'accord avec la simulation est bon. Les erreurs les plus importantes se trouvent sur la première onde de Stokes (1,5%) et sur la pompe (1,1%) (figure 1.6). L'erreur sur les ondes de Stokes intermédiaires est particulièrement faible ( $<0,5\%$ ), indiquant qu'une fois le régime stationnaire atteint, toute la puissance qu'une onde de Stokes intermédiaire reçoit de la précédente est transférée à la suivante.

Stokes	fréquence (THz)	gain ( $\text{km}^{-1}\text{W}^{-1}$ )	absorption ( $\text{km}^{-1}$ )
p	281	2,576	0,143
1	268	2,455	0,118
2	255	2,114	0,096 9
3	242	1,786	0,085 2
4	228	1,474	0,081 4
5	215	1,181	0,194
6	202	0,912	0,043 6

Tableau 1.1 : Paramètres de la fibre

### 1.3.4 Rendement et seuil

Connaissant les valeurs de  $C_n$ , nous pouvons maintenant calculer la puissance de sortie du laser. Rappelons l'expression de la puissance de sortie (1.9) :

$$P_{\text{sortie}} = (1 - R_n^+) P_n^+|_{z=L} = (1 - R_n^+) C_n \exp(\theta_n|_{z=L}) = \frac{(1 - R_n^+) C_n}{\sqrt{R_n^+}} \quad (1.30)$$



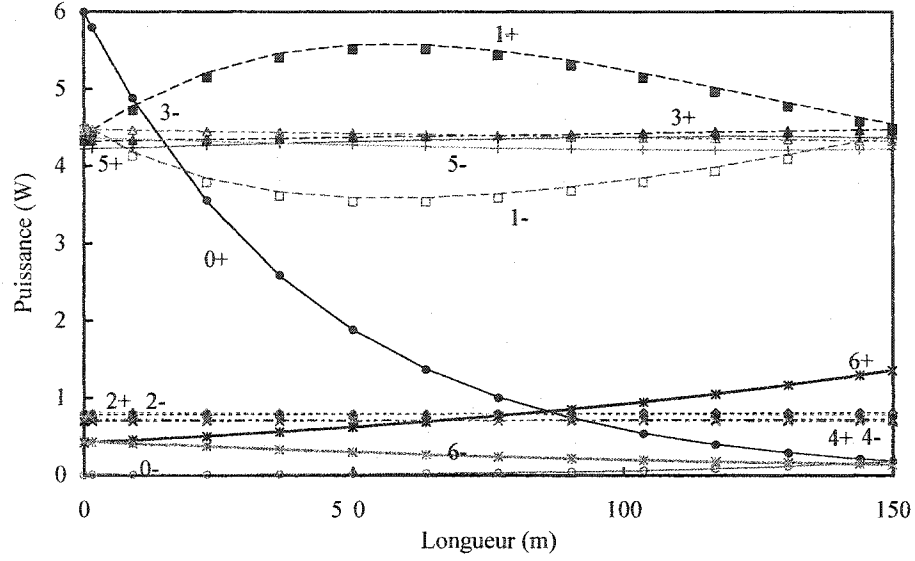


Figure 1.5 : Comparaison entre le calcul analytique et la simulation. Les points sont les résultats des simulations alors que les courbes proviennent du calcul analytique. Les courbes noires représentent la puissance se déplaçant vers  $+z$  tandis que les courbes grises se rapportent à la puissance contradirectionnelle ( $-z$ ). Nous voyons que l'approximation (1.12) est justifiée car les résultats concordent bien. L'erreur est présentée à la figure 1.6. Les conventions sont les mêmes qu'à la figure 1.3.

Le rendement est donné par :

$$\eta = \left. \frac{dP_{\text{sortie}}}{dP_0^+} \right|_{z=0} = \frac{1 - R_n^+}{\sqrt{R_n^+}} \frac{dC_n}{dP_{\text{in}}}$$

La condition de seuil s'écrit alors tout simplement :

$$C_n = 0 \quad (1.31)$$

ce qui nous permet de trouver la puissance de seuil  $P_s$ .

1.  $n$  pair

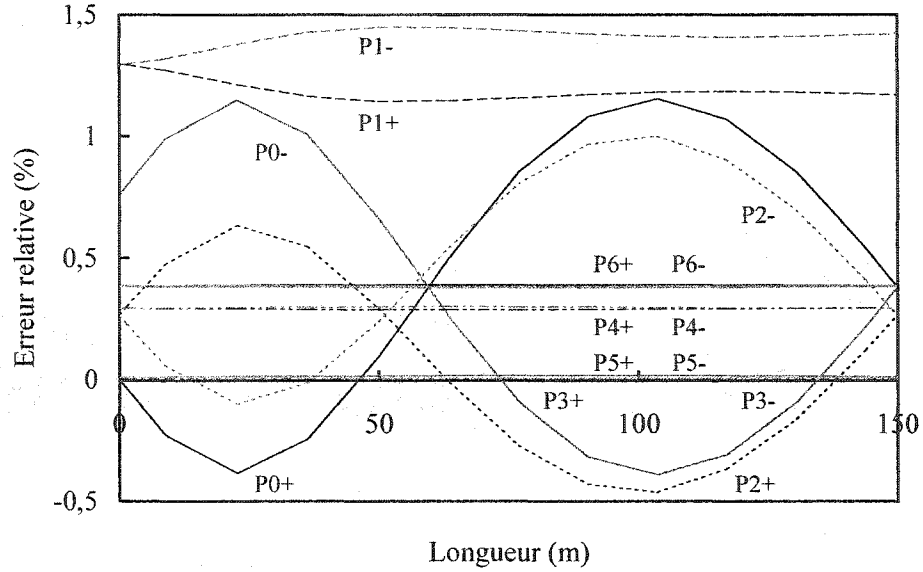


Figure 1.6 : Erreur relative entre le calcul analytique et la simulation ; Les courbes en noir représente la puissance se déplaçant vers  $+z$  tandis que les courbes en gris se rapportent à la puissance contradirectionnelle ( $-z$ ). L'erreur la plus grande est de 1,5% et se retrouvent sur la première onde de Stokes, ce qui n'est pas surprenant puisque l'approximation (1.12) est d'autant plus vraie que l'onde de Stokes est loin de la pompe. L'erreur de 1,1% sur la pompe provient de sa dépendance à la première onde de Stokes.

Le rendement s'écrit :

$$\eta_{\text{pair}} = \frac{1 - R_n^+}{\sqrt{R_n^+}} \left[ \frac{\ln \sqrt{R_n^+ R_n^-}}{\sinh \left( \ln \sqrt{R_n^+} \right) + \sinh \left( \ln \sqrt{R_n^-} \right)} \right] \times \left[ \frac{1}{4g_0 L \sum_{j=2, j \text{ pair}}^n \left[ \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right] + 2\alpha_0 L} \right] \quad (1.32)$$

et la puissance de seuil :

$$P_{s, \text{pair}} = 4g_0 L \left[ \sum_{j=2, j \text{ pair}}^n \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right) + \frac{\alpha_0}{2g_0} \right] \left[ \sum_{j=1, j \text{ impair}}^{n-1} \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right) \right] \quad (1.33)$$

## 2. $n$ impair

Le rendement s'écrit pour le cas impair :

$$\eta_{\text{impair}} = \frac{1 - R_n^+}{\sqrt{R_n^+}} \left[ \frac{\ln \sqrt{R_n^+ R_n^-}}{\sinh \left( \ln \sqrt{R_n^+} \right) + \sinh \left( \ln \sqrt{R_n^-} \right)} \right] \times \left[ \frac{1}{4g_0 L \sum_{j=1, j \text{ impair}}^n \left[ \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right]} \right] \quad (1.34)$$

et la puissance de seuil :

$$P_{s,\text{impair}} = 4g_0 L \left[ \sum_{i=1, i \text{ impair}}^n \left( \frac{\alpha_i}{2g_i} - \frac{\ln(R_i^- R_i^+)}{4g_i L} \right) \right] \left[ \sum_{i=2, i \text{ pair}}^{n-1} \left( \frac{\alpha_i}{2g_i} - \frac{\ln(R_i^- R_i^+)}{4g_i L} \right) + \frac{\alpha_0}{2g_0} \right] \quad (1.35)$$

### 1.3.5 Lois d'invariance

Certaines variables jouent un rôle similaire dans les expressions précédentes. Nous voyons sur le terme apparaissant dans les équations précédentes :

$$\alpha_j - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{2L} \quad \text{pour } 0 < j < n \quad (1.36)$$

qu'une augmentation de l'absorption  $\alpha_j$  est équivalente à une diminution des coefficients de réflexion  $R_j^\pm$ . Pour trouver les autres lois d'invariance, réécrivons les équations précédentes avec la normalisation suivante :

$$g_j = g_0 \bar{g}_j \quad \alpha_j = \alpha_0 \bar{\alpha}_j \quad (1.37)$$

Les  $\bar{g}_i$  et  $\bar{\alpha}_i$  représentent la dépendance spectrale du gain et de l'absorption qui changent peu d'une fibre à l'autre. Nous travaillerons qu'avec les équations correspondant à  $n$  pair puisque les conclusions sont les mêmes dans les deux cas.

$$\begin{aligned}
P_{\text{sortie}} = & \left\{ \frac{P_{\text{in}}}{4\alpha_0 L \sum_{j=2, j \text{ pair}}^n \left[ \frac{\bar{\alpha}_j}{2\bar{g}_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4\bar{g}_j \alpha_0 L} \right] + 2\alpha_0 L} \right. \\
& \left. - \frac{\alpha_0}{g_0} \sum_{j=1, j \text{ impair}}^{n-1} \left[ \frac{\bar{\alpha}_j}{2\bar{g}_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4\bar{g}_j \alpha_0 L} \right] \right\} \\
& \times \left[ \frac{\ln \sqrt{R_n^+ R_n^-}}{\sinh \left( \ln \sqrt{R_n^+} \right) + \sinh \left( \ln \sqrt{R_n^-} \right)} \right] \left[ \frac{1 - R_n^+}{\sqrt{R_n^+}} \right] \quad (1.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_p = & \frac{1 - R_n^+}{\sqrt{R_n^+}} \left[ \frac{\ln \sqrt{R_n^+ R_n^-}}{\sinh \left( \ln \sqrt{R_n^+} \right) + \sinh \left( \ln \sqrt{R_n^-} \right)} \right] \\
& \times \left[ \frac{1}{4\alpha_0 L \sum_{j=2, j \text{ pair}}^n \left[ \frac{\bar{\alpha}_j}{2\bar{g}_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4\bar{g}_j \alpha_0 L} \right] + 2\alpha_0 L} \right] \quad (1.39)
\end{aligned}$$

$$P_{s, \text{pair}} = 4\alpha_0 L \left[ \sum_{j=2, j \text{ pair}}^n \left( \frac{\bar{\alpha}_j}{2\bar{g}_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4\bar{g}_j \alpha_0 L} \right) + \frac{1}{2} \right] \frac{\alpha_0}{g_0} \left[ \sum_{j=1, j \text{ impair}}^{n-1} \left( \frac{\bar{\alpha}_j}{2\bar{g}_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4\bar{g}_j \alpha_0 L} \right) \right] \quad (1.40)$$

Dans les équations (1.38)–(1.40), certaines variables sont toujours regroupées ensemble. Ces groupes forment les autres lois d'invariance :

$$\alpha_0 L \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_0}{g_0} \quad (1.41)$$

Pour une même cavité, si nous changeons la fibre pour une fibre deux fois plus absorbante ( $\alpha_0$  multiplié par 2), nous devons réduire la longueur de la cavité de moitié pour avoir le même rendement. Toutefois, pour avoir la même puissance de seuil et de sortie, il faut que le gain de cette nouvelle fibre soit deux fois plus grand. Ces lois d'invariance sont les mêmes que celles rapportées par la référence [Renner *et al.* 2003].

### 1.3.6 Optimisation des paramètres

Trouvons les valeurs des paramètres de sorte à avoir le rendement et la puissance de sortie les plus élevés possible tout en ayant la puissance de seuil la plus faible possible. Cherchons d'abord la longueur de cavité minimisant la puissance au seuil.

$$\frac{dP_s}{dL} = 0 \Rightarrow L_s = \sqrt{\frac{\sum_{j \text{ pair}} \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j} \sum_{j \text{ impair}} \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j}}{\sum_{j \text{ impair}} \frac{\alpha_j}{2g_j} \left( \sum_{j \text{ pair}} \frac{\alpha_j}{2g_j} + \frac{\alpha_0}{2g_0} \right)}} \quad (1.42)$$

$$\frac{d^2 P_s}{dL^2} \propto g_0 L \sum_{j \text{ impair}} \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L^2} \sum_{j \text{ pair}} \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L^2} > 0 \quad \forall L \quad (1.43)$$

Les sommes se font jusqu'à  $n$  ou  $n - 1$  selon que  $n$  est pair ou impair. Nous pouvons voir qu'il est avantageux d'avoir  $R_j$  le plus proche possible de 1. Il n'est pas surprenant de constater que la longueur qui minimise le seuil est d'autant plus courte que l'absorption est grande. La longueur maximisant la puissance de sortie est donnée par :

$$\frac{dP_{\text{sortie}}}{dL} = 0 \Rightarrow L_{\text{pmax,pair}} = \frac{\sum_{j \text{ pair}} \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j}}{\sum_{i \text{ pair}} \frac{\alpha_j}{2g_j} + \frac{\alpha_0}{2g_0} - \sqrt{\frac{-P_{\text{in}} \left( \sum_{j \text{ pair}} \frac{\alpha_j}{2g_j} + \frac{\alpha_0}{2g_0} \right)}{4g_0 \sum_{j \text{ impair}} \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j}}}} \quad (1.44)$$

$$L_{\text{pmax,impair}} = \frac{\sum_{j \text{ impair}} \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j}}{\sum_{j \text{ impair}} \frac{\alpha_j}{2g_j} - \sqrt{\frac{-P_{\text{in}} \sum_{j \text{ impair}} \frac{\alpha_j}{2g_j}}{4g_0 \sum_{j \text{ pair}} \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j}}}} \quad (1.45)$$

$$\frac{d^2 P_{\text{sortie}}}{dL^2} \propto \frac{P_{\text{in}}}{g_0} \frac{\left( \sum \frac{\alpha_j}{2g_j} \right)^2}{\left( \sum \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} + \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j} \right) \right)^3} + \sum \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{2g_j L^3} < 0 \quad \forall L \text{ si } \alpha_j \ll 1 \quad (1.46)$$

Nous voyons encore une fois que si les réflecteurs sont parfaits ( $R_j \approx 1$ ), la longueur optimisée de la cavité tend vers zéro. Si nous augmentons la puissance d'entrée, nous

devons diminuer la longueur de la cavité pour avoir un fonctionnement optimum.

Pour le rendement, nous obtenons :

$$\frac{d\eta}{dL} = 0 \quad \Rightarrow \quad L \rightarrow \infty \quad (1.47)$$

$$\frac{d^2\eta}{dL^2} \propto \left( \sum \frac{\alpha_j}{2g_j} \right)^2 \frac{1}{\left[ L \sum \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j} \right) \right]^3} > 0 \quad \forall L \quad (1.48)$$

Nous constatons que le rendement diminue lorsque  $L$  augmente. L'autre paramètre critique à regarder est le coefficient de réflexion du coupleur de sortie  $R_n^+$ . En considérant que  $R_n^- \approx 1$ , il suit que  $\sinh \left( \ln \sqrt{R_n^-} \right) \ll \sinh \left( \ln \sqrt{R_n^+} \right)$  et nous pouvons faire la simplification suivante :

$$\frac{1 - R_n^+}{\sqrt{R_n^+}} \left[ \frac{\ln \sqrt{R_n^+ R_n^-}}{\sinh \left( \ln \sqrt{R_n^+} \right) + \sinh \left( \ln \sqrt{R_n^-} \right)} \right] \approx -\ln (R_n^+ R_n^-) \quad (1.49)$$

ce qui nous permet de calculer la réflectivité du réseau de sortie minimisant la puissance au seuil :

$$\frac{dP_s}{dR_n^+} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_n^+} = 0 \quad (1.50)$$

$$\frac{d^2 P_s}{(dR_n^+)^2} \propto \frac{1}{(R_n^+)^2} > 0 \quad (1.51)$$

Il est clair que plus la réflectivité du coupleur de sortie est proche de 1, plus faible est la puissance d'injection au seuil. Pour optimiser la puissance de sortie, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{\text{sortie}}}{dR_n^+} &= 0 \Rightarrow \\
R_{n,\text{pair}}^+ &= \frac{1}{R_n^-} \exp \left\{ 4g_n L \left[ \sum_{j=2, j \text{ pair}}^{n-2} \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right) + \frac{\alpha_0}{2g_0} + \frac{\alpha_n}{2g_n} \right. \right. \\
&\quad - \sqrt{\left( \sum_{j=2, j \text{ pair}}^{n-2} \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right) + \frac{\alpha_0}{2g_0} + \frac{\alpha_n}{2g_n} \right)} \\
&\quad \left. \left. \times \sqrt{\frac{P_{\text{in}}}{4g_0 L} \frac{1}{\sum_{j=1, j \text{ impair}}^{n-1} \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right)}} \right] \right\} \quad (1.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{n,\text{impair}}^+ &= \frac{1}{R_n^-} \exp \left\{ 4g_n L \left[ \sum_{j=1, j \text{ impair}}^{n-2} \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right) + \frac{\alpha_n}{2g_n} \right. \right. \\
&\quad - \sqrt{\left( \sum_{j=1, j \text{ impair}}^{n-2} \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right) + \frac{\alpha_n}{2g_n} \right)} \\
&\quad \left. \left. \times \sqrt{\frac{P_{\text{in}}}{4g_0 L} \frac{1}{\sum_{j=2, j \text{ pair}}^{n-1} \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right) + \frac{\alpha_0}{2g_0}}} \right] \right\} \quad (1.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 P_{\text{sortie}}}{(dR_n^+)^2} &\propto 4g_n L \left[ 1 - \frac{4g_0 L}{P_{\text{in}}} \sum \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right) \right] \sum \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right) \\
&\quad + \left[ 1 - \frac{1}{4g_n L} \frac{2}{\sum \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_j L} \right)} \right] - 2 < 0 \quad \forall R_n^+ \quad (1.54)
\end{aligned}$$

Il n'est pas évident que la dérivée seconde soit négative ; il a fallu l'évaluer numériquement pour s'en convaincre. L'équation (1.53) nous donne la réflectivité du coupleur de sortie

maximisant la puissance à la sortie. Pour le rendement nous avons :

$$\frac{d\eta}{dR_n^+} = -\frac{1}{R_n^+} \frac{1}{4g_0L} \left[ \sum_j^{n-2} \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_jL} \right) + \frac{\alpha_n}{2g_n} \right] \frac{1}{\left[ \sum_j^n \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_jL} \right) \right]^2} \quad (1.55)$$

$$\frac{d\eta}{dR_n^+} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_n^+} = 0 \quad (1.56)$$

$$\frac{d^2\eta}{(dR_n^+)^2} \propto 4g_nL \sum_j^{n-2} \left( \frac{\alpha_j}{2g_j} - \frac{\ln(R_j^- R_j^+)}{4g_jL} \right) + 2\alpha_nL - \ln(R_n^- R_n^+) - 2 \quad (1.57)$$

Nous en déduisons que plus  $R_n^+$  est proche de 0, meilleur est le rendement. Il faut donc trouver un compromis entre la condition de seuil et celle du rendement.

Les figures 1.7-1.9 nous montrent comment varie la puissance de sortie pour différentes valeurs de puissance d'entrée, de longueur de la cavité et de coefficient de réflexion à la sortie et sont comparables à ce que nous retrouvons dans [Rini *et al.* 2000]. Les paramètres utilisés sont ceux du tableau 1.1 et les réflectivités des miroirs intermédiaires sont de 96,7%. Si nous considérons une puissance d'injection de  $P_{in} = 6$  Watts, les valeurs optimisant la puissance de sortie sont une longueur de 255 mètres, un coupleur de sortie de réflectivité 33%, comme nous pouvons le voir en détail sur la figure 1.10. Le résultat de la simulation recalculée avec ces nouveaux paramètres optimisés est présenté à la figure 1.11.

Le calcul analytique nous permet donc d'optimiser facilement le laser. Il est ainsi possible de déterminer le rendement et la puissance au seuil directement en fonction des paramètres de la cavité et de la fibre. Nous pouvons également tirer les lois d'invariance qui nous permettent de considérer facilement le design de cavités avec des fibres différentes. Le calcul nous donne également une meilleure compréhension du laser en régime continu.



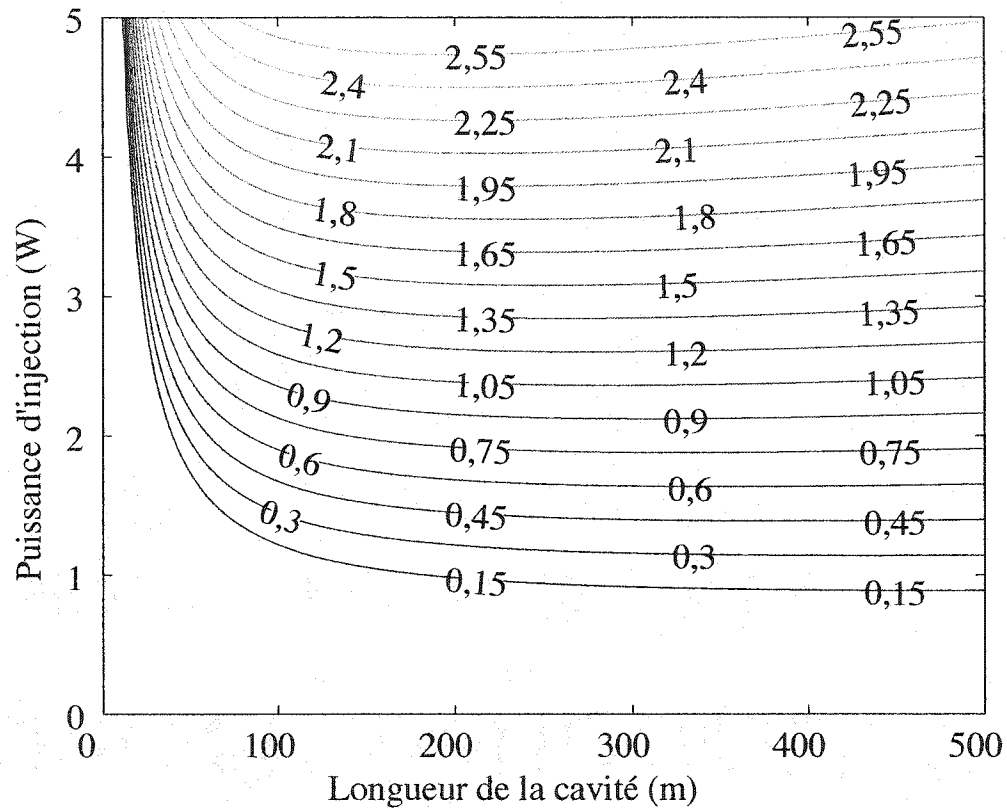


Figure 1.7 : Courbes de niveaux de puissance de sortie pour une cavité avec un réseau de sortie de réflectivité  $R_n^+ = 0,1$ , des réseaux intermédiaires de réflectivité  $R_j = 0,967$ . La puissance de sortie varie linéairement avec la puissance d'injection (le rendement est linéaire) comme dans la plupart des lasers. D'autre part, la puissance de sortie augmente rapidement avec la longueur sur les cent premiers mètres car cela minimise l'effet des pertes aux réflecteurs jusqu'au point où l'absorption devient importante et fait diminuer la puissance de sortie.

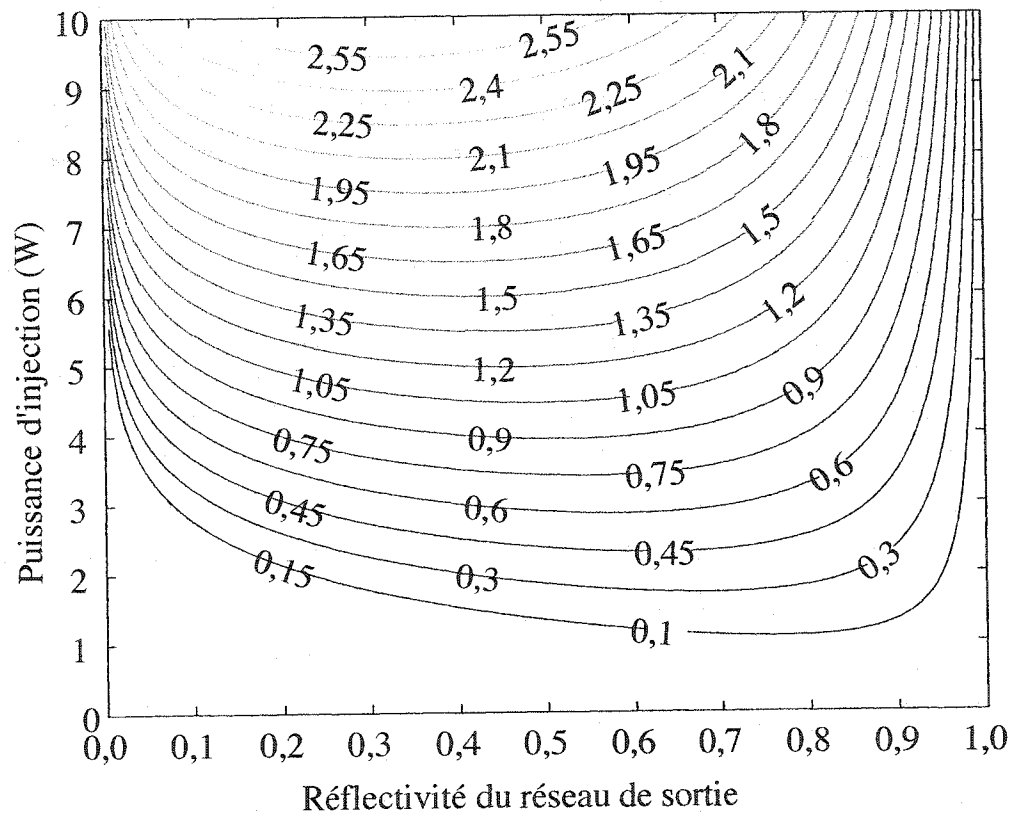


Figure 1.8 : Courbes de niveaux de puissance de sortie pour une cavité de  $L = 250$  m et des réseaux intermédiaires de  $R_j = 0,967$ . La puissance de sortie est forcément nulle lorsque le réseau de sortie est  $R_n^+ = 0$  (car il n'y a pas de résonnateur) ou  $R_n^+ = 1$  (car la puissance ne peut pas sortir du résonnateur).

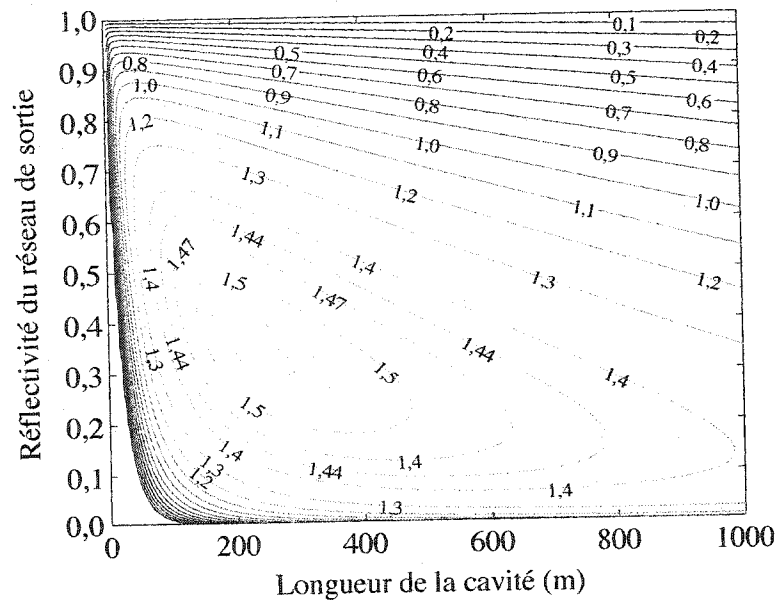


Figure 1.9 : Courbes de niveaux de puissance de sortie en fonction de la réflectivité du réseau de sortie et de la longueur de la cavité pour une puissance d'entrée de  $P_{in} = 6$  W et des réseaux intermédiaires de réflectivité  $R_j = 0,967$ . Nous pouvons optimiser les paramètres de la cavité en prenant la longueur de cavité ainsi que le réseau de sortie nous donnant un maximum de puissance de sortie. Le détail est donné à la figure (1.10).

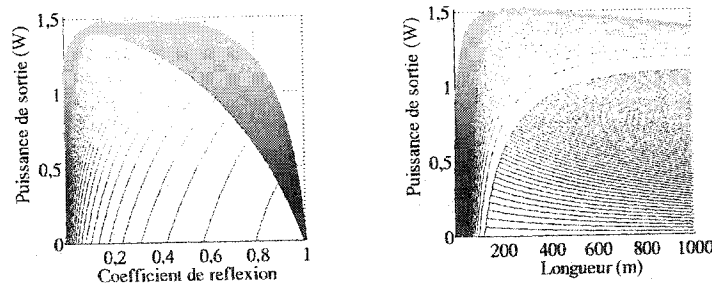


Figure 1.10 :  $P_{sortie}$  en fonction de la réflectivité du réseau de sortie pour différentes longueurs et en fonction de la longueur pour différentes réflectivités. La puissance d'entrée est  $P_{in} = 6$  W.

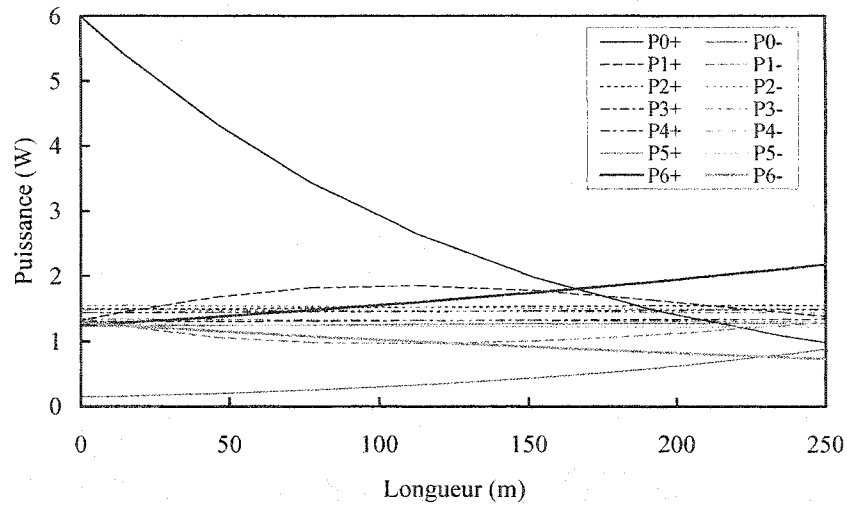


Figure 1.11 : Puissance des ondes de Stokes dans la cavité optimisée calculée numériquement d'une longueur de  $L = 255$  m avec une puissance d'injection de de  $P_{in} = 6$  W, un réseau de sortie de  $R_n^+ = 0,33$  et des réflecteurs intermédiaires de  $R_i = 0,967$ . La puissance de sortie est de 1,47 W, alors qu'elle était de 1,22 W pour le cas précédent à la figure 1.3.

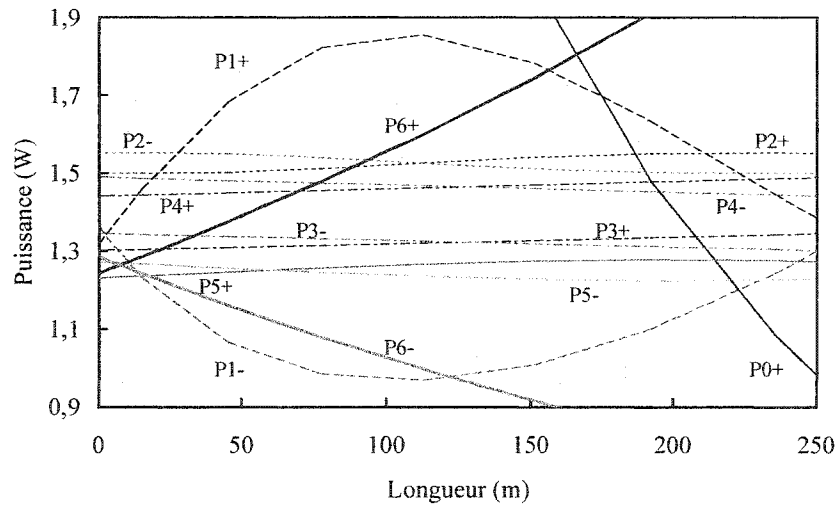


Figure 1.12 : Vue en détail de la puissances des ondes de Stokes dans la cavité optimisée. Nous voyons qu'il y a moins de puissance dans la première Stokes pour la cavité optimale, ce qui rend le calcul analytique d'autant plus précis.

## 1.4 Simulation du régime transitoire

Il est intéressant de savoir ce qui se passe dans la cavité lorsque nous allumons le laser. Pour ce faire, nous devons résoudre le système d'équations (1.1a)-(1.1c) avec les conditions (1.3) pour connaître le régime transitoire. Nous avons donc un système d'équations non linéaires aux dérivées partielles avec conditions aux limites. Ces équations ne nous permettent toutefois pas de calculer la solution transitoire du laser puisque nous avons négligé le bruit. Pour qu'une onde de Stokes soit générée, il doit y avoir un signal à amplifier ; dans le laser c'est le bruit qui sert de signal. Il est possible de montrer [Min, Lee & Park 2000], [Karasek & Menif 2002], [Headley & Agrawal 1995], que (1.1a)-(1.1c) considérant le bruit s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0^\pm(z, t)}{\partial z} \pm \beta_{1,0} \frac{\partial P_0^\pm(z, t)}{\partial t} = \mp g_0 \left( P_1^+(z, t) + P_1^-(z, t) + 4hf_0 B_0^\mp \right) P_0^\pm(z, t) \\ \mp \alpha_0 P_0^+(z, t) \end{aligned} \quad (1.58a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_j^\pm(z, t)}{\partial z} \pm \beta_{1,j} \frac{\partial P_j^\pm(z, t)}{\partial t} = \pm g_j \left( P_{j-1}^+(z, t) + P_{j-1}^-(z, t) \right) \left( P_j^\pm(z, t) + 2hf_j B_j^\pm \right) \\ \mp g_j \left( P_{j+1}^+(z, t) + P_{j+1}^-(z, t) + 4hf_j B_j^\mp \right) P_j^\pm(z, t) \\ \mp \alpha_j P_j^+(z, t) \end{aligned} \quad (1.58b)$$

pour  $j = 1$  à  $n - 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n^\pm(z, t)}{\partial z} \pm \beta_{1,n} \frac{\partial P_n^\pm(z, t)}{\partial t} = \pm g_n \left( P_{n-1}^+(z, t) + P_{n-1}^-(z, t) \right) \left( P_n^\pm(z, t) + 2hf_n B_n^\pm \right) \\ \mp \alpha_n P_n^+(z, t) \end{aligned} \quad (1.58c)$$

où  $h$  est la constante de Planck,  $f_j$  la fréquence de la  $j$ ième Stokes et

$$B_j^\pm = 1 + \frac{1}{\exp \left( \frac{\pm h(f_{j\mp 1} - f_j)}{k_B T} \right) - 1} \quad (1.59)$$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température. Les équations (1.58a)-(1.58c) nous permettent de décrire le régime transitoire du laser avec comme conditions ini-

tiales  $P_j(z, 0) = 0$  sauf pour  $P_0^+(0, t) = P_{\text{in}}$  avec  $t \geq 0$ .

### 1.4.1 Méthode numérique

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles, il existe plusieurs algorithmes. Nous avons choisi la méthode des lignes qui nous permet de transformer notre problème aux conditions aux limites en problème aux conditions initiales (ce qui est plus facile à résoudre!). La méthode des lignes [Zwillinger 1989] consiste à découper (par différences finies) le domaine en  $z$  en tranches et à considérer chacune d'elles comme une nouvelle variable qui dépend uniquement du temps. Les conditions aux limites s'appliquent alors directement aux variables associées en  $z = 0$  et  $z = L$ . Le nouveau système d'équations est d'autant plus grand que la partition en  $z$  est serrée, mais il ne faut que l'intégrer dans le temps par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas variables. Il est plus avantageux d'utiliser la méthode des lignes qu'une méthode de tir temporelle puisque le problème de convergence de l'algorithme de Newton ne se pose pas.

### 1.4.2 Régime transitoire

En résolvant les équations (1.1a)-(1.1c), nous trouvons le régime transitoire présenté aux figures 1.13-1.15.

Pour bien comprendre la dynamique du régime transitoire, il faut remarquer que la variation de puissance d'une onde de Stokes (ou de la pompe) est donnée par  $g_i(P_{i\pm 1}^+ + P_{i\pm 1}^-)P_i$ . Quand nous allumons le laser, la puissance de la pompe se propage dans la cavité. Puisque très peu de puissance se trouve dans les ondes de Stokes (seulement l'émission spontanée), le transfert demeure faible jusqu'à ce que suffisamment de puissance pompe se transfère dans la première onde de Stokes. Lorsque la puissance Stokes est très grande, le produit  $g_i(P_{i\pm 1}^+ + P_{i\pm 1}^-)P_i$  devient grand et le transfert de puissance se fait très rapidement (car il est d'autant plus grand que la puissance Stokes augmente). Ce comportement est clairement visible aux figures 1.16 et 1.17

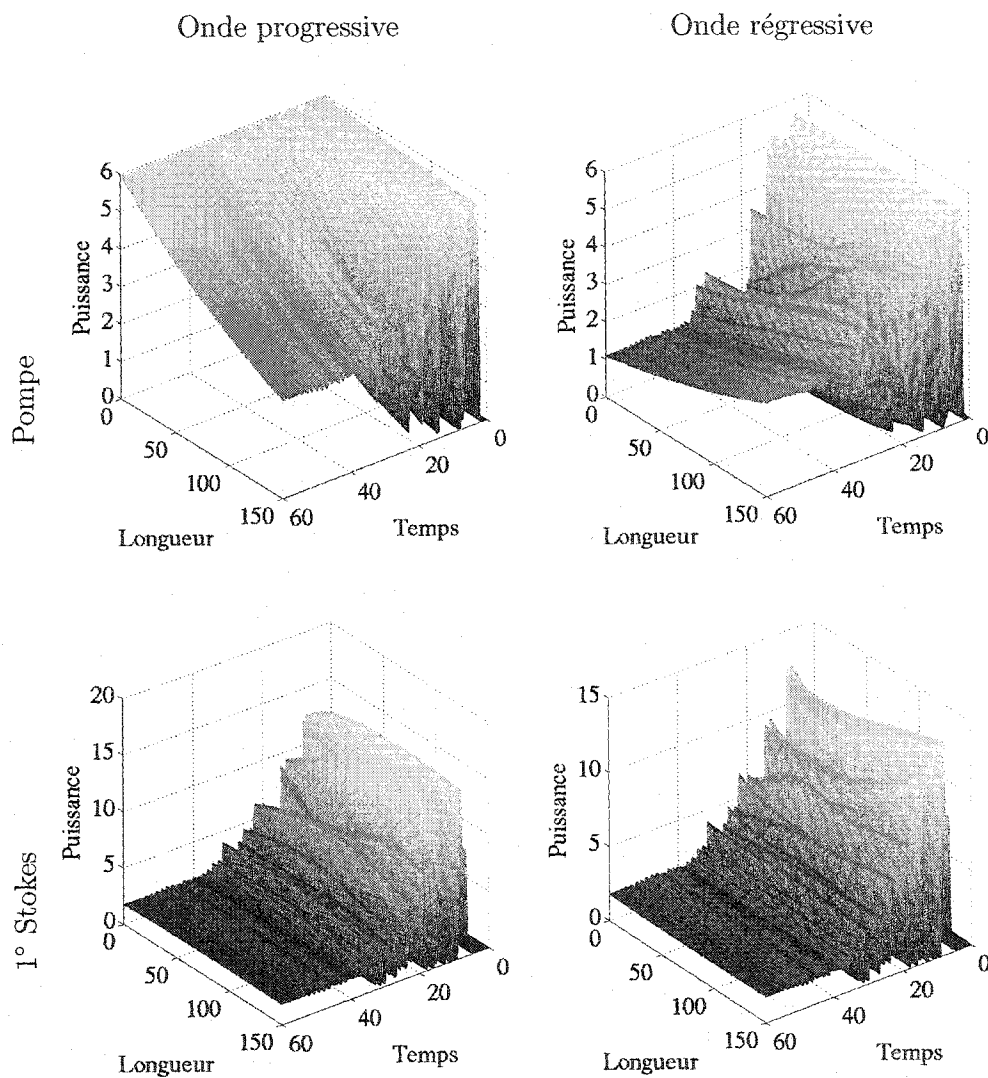


Figure 1.13 : Variations de la puissance dans la cavité avec le temps en régime transitoire pour la pompe et la première onde de Stokes. Les puissances fluctuent beaucoup avant de se stabiliser. La puissance de la première onde de Stokes atteint des valeurs jusqu'à 4 fois la puissance d'injection  $P_{in}$ .

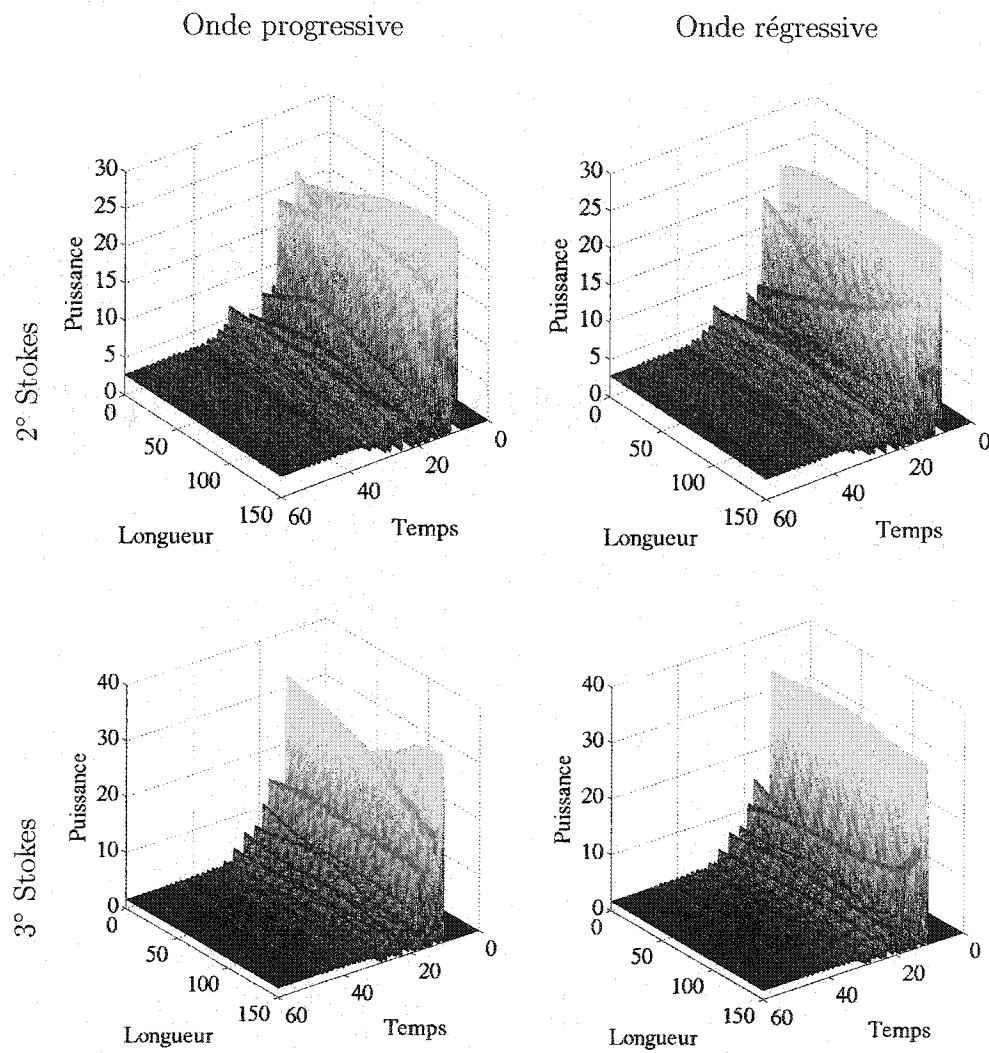


Figure 1.14 : Variations de la puissance dans la cavité avec le temps en régime transitoire pour la deuxième et la troisième ondes de Stokes.



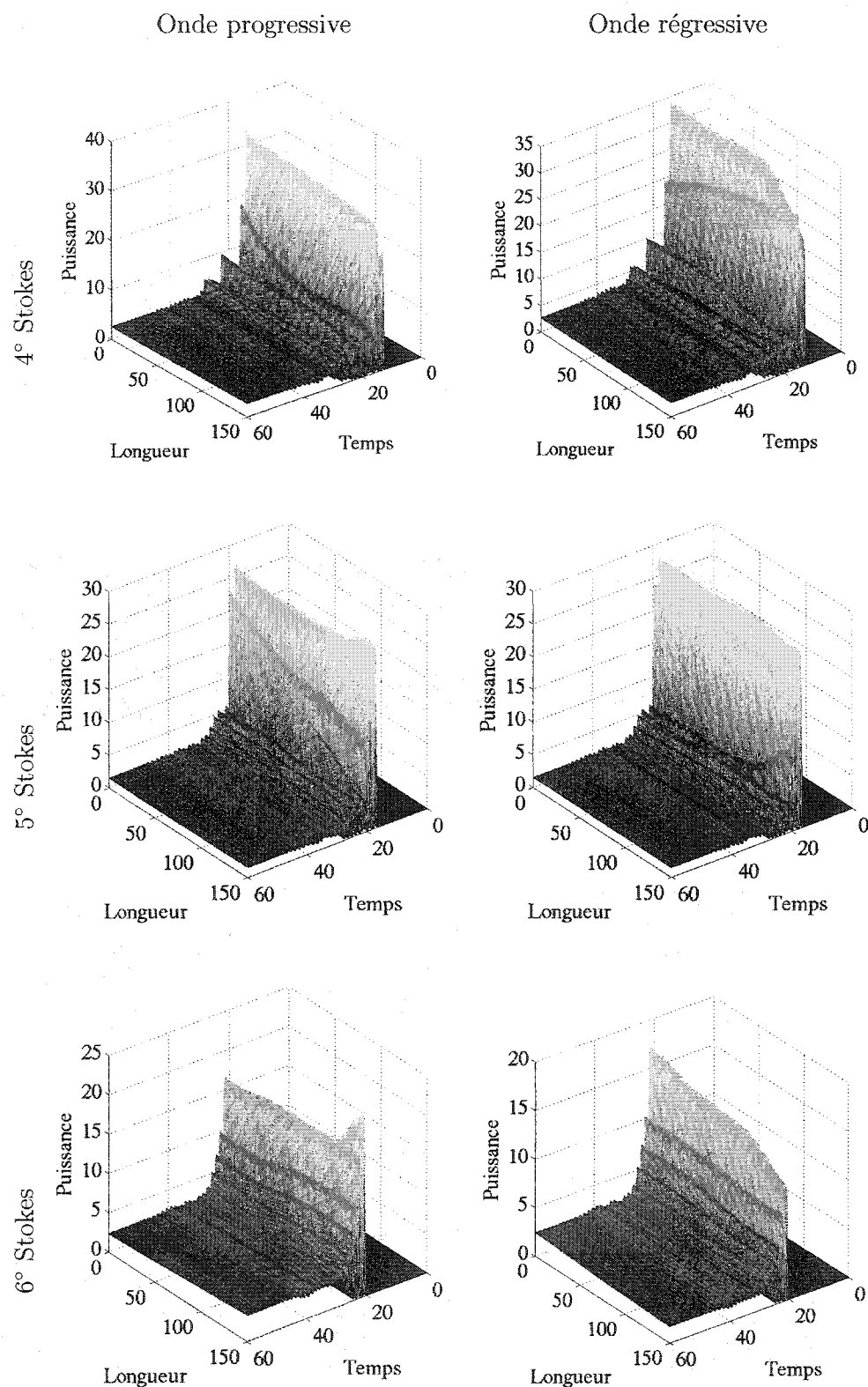


Figure 1.15 : Variations de la puissance dans la cavité avec le temps en régime transitoire pour les 3 dernières ondes de Stokes.

où nous pouvons voir comment la puissance fluctue avec le temps dans chacune des Stokes sur une tranche en  $z$  au centre de la cavité.

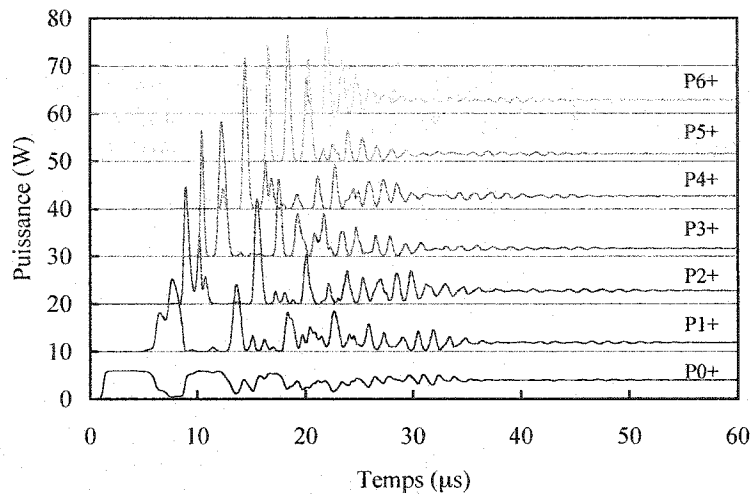


Figure 1.16 : Variations de la puissance sur une tranche de la cavité avec le temps ; la cavité fait 150 m de long. Des pics de puissance apparaissent dans la cavité dans le régime transitoire. Quand la puissance arrive dans une onde de Stokes, elle ne peut passer immédiatement dans la suivante car la puissance de cette dernière est trop faible pour qu'il y ait un transfert efficace ; elle s'accumule donc et forme un pic. Le système finit toutefois par se stabiliser.

Le tout recommence entre la première Stokes et la suivante, sauf que cette fois-ci, la puissance s'accumule dans les ondes de Stokes à cause du Fabry-Perot, accélérant ainsi le processus. Nous voyons donc un pic de puissance (voir figures 1.16 et 1.17) dans chaque onde de Stokes au début de son pompage avant qu'il n'y ait suffisamment de puissance dans la Stokes suivante pour que le transfert se fasse au même rythme que le pompage. La pompe ne continue plus à transférer de la puissance vers la première onde de Stokes car il y a plus de puissance accumulée qu'au début où il n'y avait que du bruit. Considérant qu'un aller-retour dans la cavité dure :

$$\tau = \frac{2L}{v_g} \approx \frac{300 \text{ m}}{2 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,5 \mu\text{s} \quad (1.60)$$

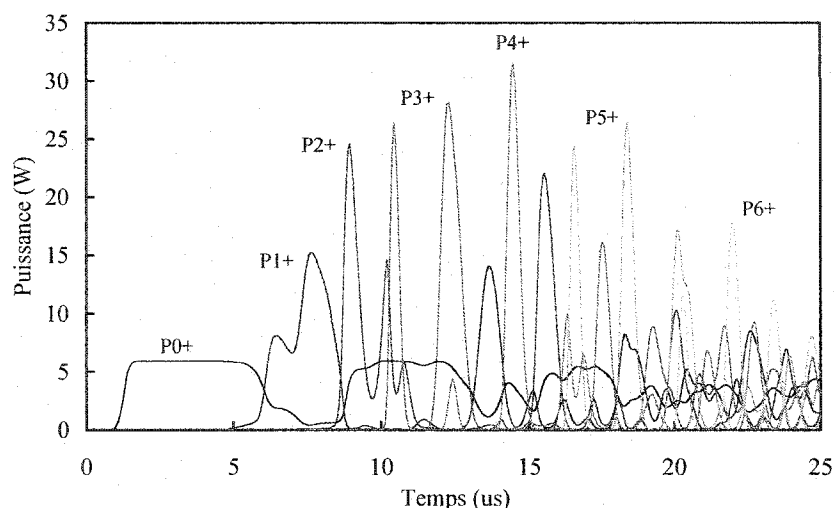


Figure 1.17 : Variations de la puissance sur une tranche de la cavité avec le temps (zoom).

nous constatons que les pics de puissance n'existent que sur un aller simple ou au plus sur un aller-retour seulement. D'ailleurs, la plupart des oscillations ont une pseudo-période d'un aller-retour. Le système oscille ainsi jusqu'à l'équilibre qui se produit au bout d'environ 30 aller-retours. À l'équilibre, les variations de puissance sont nulles, ce qui implique que toute la puissance qu'une onde de Stokes reçoit est transmise à la suivante, ce qui fixe la puissance de chacune des ondes de Stokes.

Nous pouvons faire l'analogie simple de la figure 1.18 pour expliquer la dynamique. Associons à chaque onde de Stokes un réservoir d'eau dont le niveau d'eau correspond à la puissance Stokes. L'eau peut passer d'un réservoir à l'autre par un conduit à la base du réservoir qui est partiellement bloqué par une membrane semi-perméable flottante dont l'épaisseur est dictée par le niveau de l'eau du réservoir où le conduit se déverse. Plus le niveau y est élevé, plus la membrane est mince (et donc plus facilement s'y écoule l'eau). Plus le niveau de l'eau est élevé, plus le débit est grand dans le conduit. Le réservoir de la pompe est troué car aucune puissance ne peut s'y accumuler (il n'y a pas de résonateur). Le réservoir de la dernière onde de Stokes

est percé car le réseau de sortie à  $R_n^+ \neq 1$ .

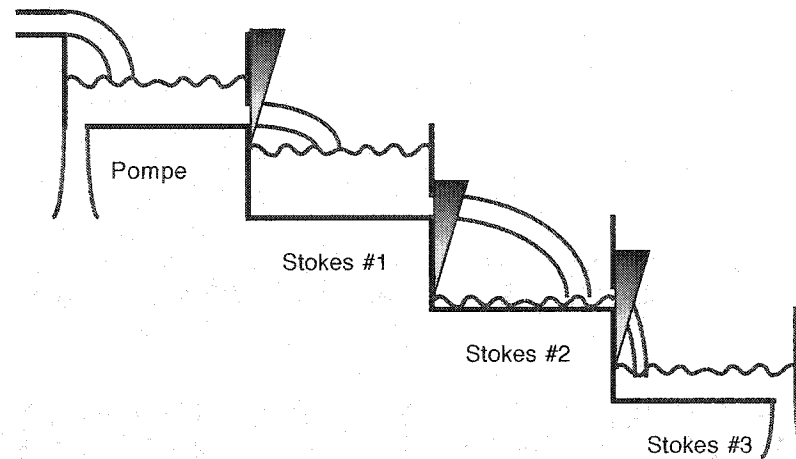


Figure 1.18 : La puissance peut être comparée à l'eau qui se déverse d'un réservoir (Stokes) à l'autre ; Le débit d'un réservoir à l'autre est déterminé par la hauteur du niveau d'eau du premier (ce qui augmente la pression) et du deuxième (ce qui réduit l'épaisseur de la membrane semi-perméable).

## Chapitre 2

### Analyse de stabilité

Nous avons établi aux chapitres précédents le système d'équations régissant le laser Raman tout-fibre en cascades en régime continu et nous l'avons résolu. Dans ce chapitre, nous nous attardons à déterminer la stabilité du laser afin de savoir s'il peut «auto-pulser», c'est-à-dire s'il peut passer spontanément à un régime impulsionnel. Toutefois, étant donnée la complexité du système d'équations du laser en cascades, nous nous limitons à un laser en anneau à une seule onde de Stokes. Nous élaborons une technique générale d'analyse de stabilité des lasers à fibre avant de l'appliquer au laser Raman en anneau.

#### 2.1 Méthode d'analyse

Pour faire l'analyse de stabilité, deux possibilités s'offrent à nous. Nous pouvons utiliser la méthode des perturbations ([Yu & McKinstrie 1998], [Chen, Wai & Menyuk 1994]) qui consiste à poser une perturbation qui dépend du temps sur la solution stationnaire du laser et à substituer le tout dans le système d'équations qui dépend du temps. Nous voyons ainsi si la perturbation croît ou s'atténue avec le temps (ou plus couramment avec les fréquences). L'autre méthode part des équations couplées où nous considérons un champ à une fréquence arbitraire de perturbation ; c'est la

méthode que nous employons. En trouvant la solution des équations couplées, nous déterminons si la perturbation est évanescente ou amplifiée.

### 2.1.1 Équations couplées

Considérons la situation décrite à la figure 2.1 où nous tenons compte de deux fréquences (une fréquence pour la pompe et une pour l'onde de Stokes) qui sont perturbées à la fréquence  $\Omega$ . Puisque nous cherchons à déterminer si le laser en régime continu est stable, nous faisons l'approximation que les champs à  $\omega_p$  et  $\omega_s$  sont monochromatiques. Nous posons également que les perturbations sont monochromatiques ; lorsque nous ferons l'étude de stabilité, nous varierons la valeur de  $\Omega$ . En

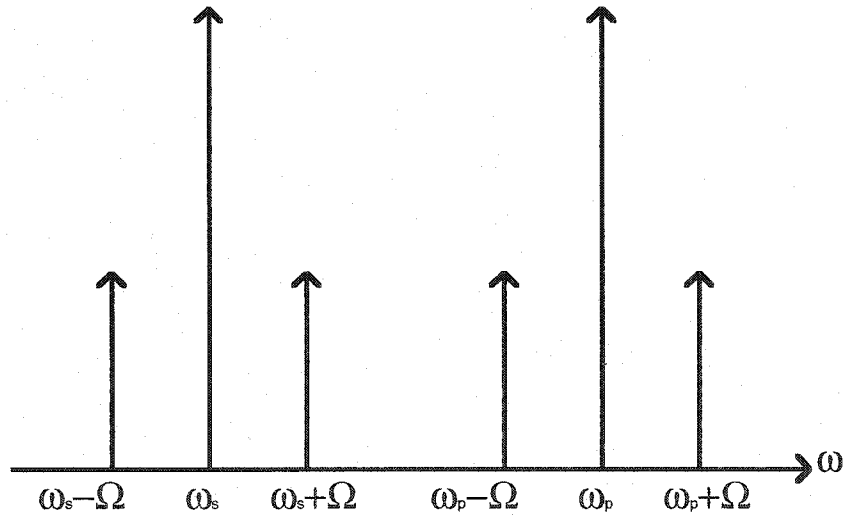


Figure 2.1 : Diagramme des fréquences de perturbation ; chaque fréquence ( $\omega_p$  ou  $\omega_s$ ) est perturbée à la fréquence  $\pm\Omega$ , ce qui nous donne en tout 4 perturbations à traiter.

supposant une polarisation en  $\vec{x}$ , nous écrivons le champ électrique dans le domaine

des fréquences comme :

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{E}}(r, \omega) = & \frac{\tilde{x}}{2} \left[ \tilde{E}_{p-\Omega}(r, \omega) + \tilde{E}_p(r, \omega) + \tilde{E}_{p+\Omega}(r, \omega) \right. \\ & \left. + \tilde{E}_{s-\Omega}(r, \omega) + \tilde{E}_s(r, \omega) + \tilde{E}_{s+\Omega}(r, \omega) \right] + \text{c.c.}\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\tilde{E}_j(r, \omega) = \tilde{A}_j(z) \Psi_j(x, y) e^{i\beta_j(\omega)z} \delta(\omega - \omega_j) \quad (2.2)$$

avec  $j = p, s, p \pm \Omega$  ou  $s \pm \Omega$  et où  $A$  est l'amplitude du champ,  $\Psi_j$  est la forme transverse du mode normalisé,  $\beta_j$  la constante de propagation du mode et  $\delta(\omega)$  la distribution de Dirac. Les équations couplées sont de la forme générale :

$$\frac{d\vec{A}}{dz} = \frac{i\omega e^{-i\beta z} \int_{\mathcal{A}_\infty} \vec{e}^* \cdot \vec{\mathcal{P}} d\mathcal{A}}{\int_{\mathcal{A}_\infty} (\vec{e} \times \vec{h}^* + \vec{e}^* \times \vec{h}) \cdot \vec{z} d\mathcal{A}} \quad (2.3)$$

où  $\vec{e}$  et  $\vec{h}$  sont respectivement les champs électrique et magnétique normalisés du mode,  $\vec{\mathcal{P}}$  le couplage non-linéaire à la fréquence  $\omega$  et  $\mathcal{A}_\infty$  est la section transverse de la fibre. Lorsque nous sommes en guidage faible, c'est-à-dire que les indices du cœur et de la gaine sont proches l'un de l'autre (ce qui est habituellement le cas), les équations couplées deviennent avec la notation 2.2 :

$$\frac{d\tilde{A}_j}{dz} = \frac{i\omega_j e^{-i\beta_j(\omega)z} \int_{\mathcal{A}_\infty} \Psi_j^* \cdot \tilde{\mathcal{P}}_j d\mathcal{A}}{2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_{\text{eff},j} \int_{\mathcal{A}_\infty} |\Psi_j|^2 d\mathcal{A}} \quad (2.4)$$

où  $\tilde{\mathcal{P}}_j = \tilde{\mathcal{P}}(\omega_j)$ . Nous avons maintenant défini une expression du champ électrique ainsi que l'expression des équations couplées ; il nous reste à définir la forme du couplage non-linéaire.

### 2.1.2 Polarisation non-linéaires

Le couplage non-linéaire est donné par la polarisation non-linéaire (la polarisation linéaire étant déjà dans les équations couplées). En séparant les contributions Raman

et électronique, la polarisation non-linéaire s'écrit dans le domaine des fréquences (voir B.28 et B.29) :

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, \omega) = \vec{\mathcal{P}}_{\text{elec}}(\vec{r}, \omega) + \vec{\mathcal{P}}_R(\vec{r}, \omega) \quad (2.5)$$

$$\vec{\mathcal{P}}_{\text{elec}}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0(\chi'_{\text{elec}} + i\chi''_{\text{elec}}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega - \omega_1 - \omega_2) \vec{E}(\vec{r}, \omega_1) \vec{E}^*(\vec{r}, -\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.6)$$

$$\vec{\mathcal{P}}_R(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega - \omega_1 - \omega_2) \tilde{h}_R(\omega_1 + \omega_2) \vec{E}(\vec{r}, \omega_1) \vec{E}^*(\vec{r}, -\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.7)$$

avec la définition de  $\tilde{h}_R$  donnée par (B.20). Nous substituons maintenant l'expression du champ électrique (2.1) dans (2.6) et nous regroupons les termes qui oscillent à la même fréquence pour obtenir la polarisation électronique. Nous négligeons les termes où apparaissent au moins deux fois un terme à une fréquence de perturbation ( $\Omega$ ), car nous ne considérons que les perturbations au premier ordre. Nous trouvons de cette façon les polarisations électronique et Raman, non perturbée et perturbée que nous traitons séparément.

### 2.1.3 Polarisation non perturbée

Nous avons ainsi pour la polarisation électronique des champs non-perturbés oscillant à  $\omega_{p,s}$  (et en laissant donc tomber le terme conjugué complexe oscillant à  $-\omega_{p,s}$ ) :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}_{\text{elec}}(\vec{r}, \omega_{p,s}) &= \tilde{x} \frac{3\epsilon_0}{4} (\chi'_{\text{elec}} + i\chi''_{\text{elec}}) \left[ |\tilde{E}_{p,s}(r, \omega_{p,s})|^2 \tilde{E}_{p,s}(r, \omega_{p,s}) \right. \\ &\quad \left. + 2|\tilde{E}_{s,p}(r, \omega_{s,p})|^2 \tilde{E}_{p,s}(r, \omega_{p,s}) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$



où les indices indiquent que nous considérons soit le champ de la pompe ( $p$ ) ou soit de l'onde de Stokes ( $s$ ). Le premier terme à droite représente l'auto-modulation de phase alors que le deuxième est la modulation de phase mutuelle. Le détail du calcul de la polarisation électronique est similaire à celui des termes Raman (à la différence que la susceptibilité ne dépend pas de la fréquence). Les termes sont explicités au tableau 2.1 :

Terme	$\omega - \omega_1 - \omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_1 + \omega_2$	$\tilde{h}_R(\omega_1 + \omega_2)$
$ E_{p,s} ^2 E_{p,s}$	$-\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s}$	$2\omega_{p,s}$	0
	$\omega_{p,s}$	$-\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s}$	0	1
	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s}$	$-\omega_{p,s}$	0	1
$ E_{s,p} ^2 E_{p,s}$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{s,p}$	$-\omega_{s,p}$	0	1
	$\omega_{p,s}$	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{s,p}$	0	1
	$\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s}$	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s} - \omega_{s,p}$	$\tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p})$
	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s} + \omega_{s,p}$	0
	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s} + \omega_{s,p}$	0
	$\omega_{s,p}$	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s} - \omega_{s,p}$	$\tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p})$

Tableau 2.1 : Contribution des termes non-perturbés. La somme des fréquences doit être  $\omega_{p,s}$  car le champ résultant oscille à cette fréquence. Les colonnes de droite nous donnent la fréquence à laquelle il faut évaluer la susceptibilité Raman et la valeur normalisée de la susceptibilité.

La somme des fréquences doit toujours valoir  $\omega_{p,s}$ . Les fréquences négatives correspondent aux complexes conjugués.

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{P}}_R(\vec{r}, \omega_{p,s}) &= \vec{x} \frac{\epsilon_0 \chi_R}{4} \left\{ \left[ 2\tilde{h}_R(0) + \tilde{h}_R(2\omega_{p,s}) \right] |\tilde{E}_{p,s}|^2 \tilde{E}_{p,s} \right. \\
&\quad \left. + 2 \left[ \tilde{h}_R(0) + \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) + \tilde{h}_R(\omega_p + \omega_s) \right] |\tilde{E}_{s,p}|^2 \tilde{E}_{p,s} \right\} \quad (2.9)
\end{aligned}$$

En se référant à la figure B.1, nous pouvons déterminer certaines valeurs de  $\tilde{h}_R(\omega)$ .

$$\tilde{h}_R(0) = 1 \quad \tilde{h}_R(2\omega_{p,s}) \approx 0 \quad \tilde{h}_R(\omega_p + \omega_s) \approx 0 \quad (2.10)$$

ce qui nous permet de réécrire :

$$\vec{\mathcal{P}}_R(\vec{r}, \omega_{p,s}) = \vec{x} \frac{\epsilon_0 \chi_R}{2} \left\{ |\tilde{E}_{p,s}|^2 \tilde{E}_{p,s} + \left[ 1 + \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) \right] |\tilde{E}_{s,p}|^2 \tilde{E}_{p,s} \right\} \quad (2.11)$$

Le premier terme entre accolades dans (2.11) est la contribution Raman à l'auto-modulation de phase. La partie réelle de l'expression entre crochets est la contribution Raman la modulation de phase mutuelle tandis que la partie imaginaire est le gain Raman. Nous verrons plus tard que les solutions perturbées dépendent des solutions non perturbées. Ceci est normal, car nous calculons la perturbation *autour* d'une solution non perturbée.

#### 2.1.4 Polarisation perturbée

Dans le cas des champs perturbés, en écrivant  $\tilde{E}_j(r, \omega_j) = \tilde{E}_j$ , nous obtenons pour la polarisation oscillant à  $\omega_{p,s \pm \Omega}$  :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}_{elec}(\vec{r}, \omega_{p,s \pm \Omega}) = & \vec{x} \frac{3\epsilon_0}{4} (\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) \left[ 2|\tilde{E}_{p,s}|^2 \tilde{E}_{p,s \pm \Omega} + 2|\tilde{E}_{s,p}|^2 \tilde{E}_{p,s \pm \Omega} + \tilde{E}_{p,s}^2 \tilde{E}_{p,s \mp \Omega}^* \right. \\ & \left. + 2\tilde{E}_{p,s} \tilde{E}_{s,p} \tilde{E}_{s,p \mp \Omega}^* + 2\tilde{E}_{p,s} \tilde{E}_{s,p}^* \tilde{E}_{s,p \pm \Omega} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les indices représentent les perturbations aux fréquences  $\omega_p + \Omega$ ,  $\omega_p - \Omega$ ,  $\omega_s + \Omega$  et  $\omega_s - \Omega$ . Il est intéressant de remarquer le facteur 2 devant le premier terme du membre de droite ; dans le cas non-perturbé il est absent. Alors que l'influence non-linéaire du champ sur lui-même se fait par auto-modulation de phase, l'effet sur la perturbation est plutôt de la modulation de phase mutuelle. Pour les termes de perturbation, il y a beaucoup de termes à regrouper. Le tableau 2.2 nous donne la liste de ces termes oscillant à  $\omega_{p,s} \pm \Omega$ .

Terme	$\omega - \omega_1 - \omega_2$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_1 + \omega_2$
$ E_{p,s} ^2 E_{p,s \pm \Omega}$	$-\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$2\omega_{p,s} \pm \Omega$
	$\omega_{p,s}$	$-\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$\pm \Omega$
	$-\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$\omega_{p,s}$	$2\omega_{p,s} \pm \Omega$
	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$-\omega_{p,s}$	$\pm \Omega$
	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$-\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s}$	0
	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$\omega_{p,s}$	$-\omega_{p,s}$	0
$E_{p,s}^2 E_{p,s \mp \Omega}^*$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s}$	$-(\omega_{p,s} \mp \Omega)$	$\pm \Omega$
	$\omega_{p,s}$	$-(\omega_{p,s} \mp \Omega)$	$\omega_{p,s}$	$\pm \Omega$
	$-(\omega_{p,s} \mp \Omega)$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s}$	$2\omega_{p,s}$
$ E_{s,p} ^2 E_{p,s \pm \Omega}$	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$\omega_{s,p}$	$-\omega_{s,p}$	0
	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{s,p}$	0
	$\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega$
	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s} + \omega_{s,p} \pm \Omega$
	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$\omega_{p,s} + \omega_{s,p} \pm \Omega$
	$\omega_{s,p}$	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s} \pm \Omega$	$\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega$
$E_{p,s} E_{s,p} E_{s,p \mp \Omega}^*$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{s,p}$	$-(\omega_{s,p} \mp \Omega)$	$\pm \Omega$
	$\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s}$	$-(\omega_{s,p} \mp \Omega)$	$\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega$
	$\omega_{p,s}$	$-(\omega_{s,p} \mp \Omega)$	$\omega_{s,p}$	$\pm \Omega$
	$\omega_{s,p}$	$-(\omega_{s,p} \mp \Omega)$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega$
	$-(\omega_{s,p} \pm \Omega)$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s} + \omega_{s,p}$
	$-(\omega_{s,p} \pm \Omega)$	$\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s} + \omega_{s,p}$
$E_{p,s} E_{s,p \pm \Omega}^* E_{s,p}$	$\omega_{p,s}$	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{s,p} \pm \Omega$	$\pm \Omega$
	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{s,p} \pm \Omega$	$\omega_{p,s} + \omega_{s,p} \pm \Omega$
	$\omega_{p,s}$	$\omega_{s,p} \pm \Omega$	$-\omega_{s,p}$	$\pm \Omega$
	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{s,p} \pm \Omega$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s} + \omega_{s,p} \pm \Omega$
	$\omega_{s,p} \pm \Omega$	$\omega_{p,s}$	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s} - \omega_{s,p}$
	$\omega_{s,p} \pm \Omega$	$-\omega_{s,p}$	$\omega_{p,s}$	$\omega_{p,s} - \omega_{s,p}$

Tableau 2.2 : Contribution des termes perturbés. La somme des fréquences doit être  $\omega_{p,s} \pm \Omega$  car le champ résultant oscille à cette fréquence. Puisque nous perturbons au premier ordre, il est impossible d'avoir deux termes perturbés. Les colonnes de droite nous donnent la fréquence à laquelle il faut évaluer la susceptibilité Raman.

La polarisation Raman dans le cas perturbé est ainsi :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{P}}_R(\vec{r}, \omega_{p,s\pm\Omega}) &= \vec{x} \frac{\epsilon_0}{4} \chi_R \left\{ 2 \left[ \tilde{h}_R(0) + \tilde{h}_R(\pm\Omega) + \tilde{h}_R(2\omega_{p,s} \pm \Omega) \right] |\tilde{E}_{p,s}|^2 \tilde{E}_{p,s\pm\Omega} \right. \\
&+ 2 \left[ \tilde{h}_R(0) + \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) + \tilde{h}_R(\omega_{p,s} + \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] |\tilde{E}_{s,p}|^2 \tilde{E}_{p,s\pm\Omega} \\
&+ 2 \left[ \tilde{h}_R(\pm\Omega) + \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) + \tilde{h}_R(\omega_{p,s} + \omega_{s,p}) \right] \tilde{E}_{p,s} \tilde{E}_{s,p} \tilde{E}_{s,p\mp\Omega}^* \\
&+ 2 \left[ \tilde{h}_R(\pm\Omega) + \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) + \tilde{h}_R(\omega_{p,s} + \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] \tilde{E}_{p,s} \tilde{E}_{s,p}^* \tilde{E}_{s,p\pm\Omega} \\
&\left. + \left[ 2\tilde{h}_R(\pm\Omega) + \tilde{h}_R(2\omega_{p,s}) \right] \tilde{E}_{p,s}^2 \tilde{E}_{p,s\mp\Omega}^* \right\} \quad (2.13)
\end{aligned}$$

En simplifiant au moyen de 2.10, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{P}}_R(\vec{r}, \omega_{p,s\pm\Omega}) &= \vec{x} \frac{\epsilon_0}{2} \chi_R \left\{ \left[ 1 + \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] |\tilde{E}_{p,s}|^2 \tilde{E}_{p,s\pm\Omega} \right. \\
&+ \left[ 1 + \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] |\tilde{E}_{s,p}|^2 \tilde{E}_{p,s\pm\Omega} \\
&+ \left[ \tilde{h}_R(\pm\Omega) + \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] \tilde{E}_{p,s} \tilde{E}_{s,p} \tilde{E}_{s,p\mp\Omega}^* \\
&+ \left[ \tilde{h}_R(\pm\Omega) + \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) \right] \tilde{E}_{p,s} \tilde{E}_{s,p}^* \tilde{E}_{s,p\pm\Omega} \\
&\left. + \left[ \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] \tilde{E}_{p,s}^2 \tilde{E}_{p,s\mp\Omega}^* \right\} \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant l'expression de nos polarisations non-linéaires, ce qui nous permet d'écrire convenablement les équations couplées.

## 2.2 Équations couplées

Pour obtenir les équations couplées, nous remplaçons l'expression du champ (2.2) dans les polarisations (2.8), (2.12) et (2.11), (2.14) et nous substituons le tout dans

l'équation couplée (2.4). Traitons tout d'abord le cas non perturbé.

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{A}_{p,s}}{dz} = & \frac{i\omega_{p,s}}{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_{\text{eff,ps}} \int_{\mathcal{A}_\infty} |\Psi_{p,s}|^2 d\mathcal{A}} \frac{3\epsilon_0}{8} \times \\
& \left\{ \left[ \chi_{elec} + i\chi'_{elec} + \frac{2\chi_R}{3} \right] |\tilde{A}_{p,s}|^2 \tilde{A}_{p,s} \int_{\mathcal{A}_\infty} |\Psi_{p,s}|^4 d\mathcal{A} \right. \\
& + \left[ 2(\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) + \frac{2\chi_R}{3} + \frac{2\chi_R}{3} \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) \right] \times \\
& \left. |\tilde{A}_{s,p}|^2 \tilde{A}_{p,s} \int_{\mathcal{A}_\infty} |\Psi_{p,s}|^2 |\Psi_{s,p}|^2 d\mathcal{A} \right\} \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Avec les définitions de  $n_2$ ,  $\alpha_2$ ,  $f_R$  et  $f_{jk}$  données à l'annexe B par respectivement (B.63), (B.62) et (B.48), les équations non perturbées s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{A}_{p,s}}{dz} = & \frac{in_{2,ps}\omega_{p,s}}{c} \left\{ f_{ps,ps} |\tilde{A}_{p,s}|^2 \tilde{A}_{p,s} + \left[ 2 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) \right] f_{ps,sp} |\tilde{A}_{s,p}|^2 \tilde{A}_{p,s} \right\} \\
& + \frac{\alpha_{2,ps}}{2} (f_{ps,ps} |\tilde{A}_{p,s}|^2 \tilde{A}_{p,s} + 2f_{ps,sp} |\tilde{A}_{s,p}|^2 \tilde{A}_{p,s}) \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Pour le cas perturbé, nous écrivons de manière similaire, en supposant que le mode transverse change peu avec la perturbation ( $\Psi_{p,s} \approx \Psi_{p,s \pm \Omega}$ ) et avec la notation  $\beta_{p,s}(\omega_{p,s}) = \beta_{p,s}$  :

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{A}_{p,s\pm\Omega}}{dz} = & \frac{i\omega_{p,s\pm\Omega}}{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_{\text{eff,ps}} \int_{\mathcal{A}_\infty} |\Psi_{p,s}|^2 d\mathcal{A}} \frac{3\epsilon_0}{8} \\
& \times \left\{ \left[ 2(\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) + \frac{2\chi_R}{3} + \frac{2\chi_R}{3} \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] |\tilde{A}_{p,s}|^2 \tilde{A}_{p,s\pm\Omega} \int_{\mathcal{A}_\infty} |\Psi_{p,s}|^4 d\mathcal{A} \right. \\
& + \left[ 2(\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) + \frac{2\chi_R}{3} + \frac{2\chi_R}{3} \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] \\
& \times |\tilde{A}_{s,p}|^2 \tilde{A}_{p,s\pm\Omega} \int_{\mathcal{A}_\infty} |\Psi_{p,s}|^2 |\Psi_{s,p}|^2 d\mathcal{A} \\
& + \left[ 2(\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) + \frac{2\chi_R}{3} \tilde{h}_R(\pm\Omega) + \frac{2\chi_R}{3} \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] \\
& \times \tilde{A}_{p,s} \tilde{A}_{s,p} \tilde{A}_{s,p\mp\Omega}^* \exp[iz(\beta_{p,s} + \beta_{s,p} - \beta_{s,p\mp\Omega} - \beta_{p,s\pm\Omega})] \int_{\mathcal{A}_\infty} |\Psi_{p,s}|^2 |\Psi_{s,p}|^2 d\mathcal{A} \\
& + \left[ 2(\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) + \frac{2\chi_R}{3} \tilde{h}_R(\pm\Omega) + \frac{2\chi_R}{3} \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) \right] \\
& \times \tilde{A}_{p,s} \tilde{A}_{s,p}^* \tilde{A}_{s,p\pm\Omega} \exp[iz(\beta_{p,s} - \beta_{s,p} + \beta_{s,p\pm\Omega} - \beta_{p,s\pm\Omega})] \int_{\mathcal{A}_\infty} |\Psi_{p,s}|^2 |\Psi_{s,p}|^2 d\mathcal{A} \\
& + \left[ \chi_{elec} + i\chi'_{elec} + \frac{2\chi_R}{3} \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] \\
& \times \tilde{A}_{p,s}^2 \tilde{A}_{p,s\mp\Omega}^* \exp[iz(2\beta_{p,s} - \beta_{p,s\mp\Omega} - \beta_{p,s\pm\Omega})] \int_{\mathcal{A}_\infty} |\Psi_{p,s}|^4 d\mathcal{A} \Big\} \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Nous explicitons la valeur de  $\beta_{p,s\pm\Omega}$  des champs perturbés en faisant sa série de Taylor autour de  $\omega_{p,s}$  afin de traiter la dispersion comme à l'annexe B.

$$\beta_{p,s\pm\Omega} = \beta_{p,s\pm\Omega}(\omega_{p,s} \pm \Omega) \approx \beta_{p,s} + \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} (\pm\Omega)^n \quad \text{avec} \quad \beta_{n,ps} = \left. \frac{d^n \beta_{p,s\pm\Omega}}{d\Omega^n} \right|_{\Omega=0} \quad (2.18)$$

En reprenant les mêmes définitions, l'équation (2.17) se résume à :

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{A}_{p,s\pm\Omega}}{dz} = & \frac{in_{2,ps}\omega_{p,s\pm\Omega}}{c} \left\{ \left[ 2 - f_R + f_R\tilde{h}_R(\pm\Omega) - \frac{i\alpha_{2,ps}c}{n_{2,ps}\omega_{p,s\pm\Omega}} \right] f_{ps,ps} |\tilde{A}_{p,s}|^2 \tilde{A}_{p,s\pm\Omega} \right. \\
& + \left[ 2 - f_R + f_R\tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) - \frac{i\alpha_{2,ps}c}{n_{2,ps}\omega_{p,s\pm\Omega}} \right] f_{ps,sp} |\tilde{A}_{s,p}|^2 \tilde{A}_{p,s\pm\Omega} \\
& + \left[ 2 - 2f_R + f_R\tilde{h}_R(\pm\Omega) + f_R\tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) - \frac{i\alpha_{2,ps}c}{2n_{2,ps}\omega_{p,s\pm\Omega}} \right] \\
& \times f_{ps,sp} \tilde{A}_{p,s} \tilde{A}_{s,p} \tilde{A}_{s,p\mp\Omega}^* \exp \left[ -iz \left( \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} (\pm\Omega)^n + \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,sp}}{n!} (\mp\Omega)^n \right) \right] \\
& + \left[ 2 - 2f_R + f_R\tilde{h}_R(\pm\Omega) + f_R\tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) - \frac{i\alpha_{2,ps}c}{2n_{2,ps}\omega_{p,s\pm\Omega}} \right] \\
& \times f_{ps,sp} \tilde{A}_{p,s} \tilde{A}_{s,p}^* \tilde{A}_{s,p\pm\Omega} \exp \left[ -iz \left( \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} (\pm\Omega)^n - \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,sp}}{n!} (\pm\Omega)^n \right) \right] \\
& + \left[ 1 - f_R + f_R\tilde{h}_R(\pm\Omega) - \frac{i\alpha_{2,ps}c}{2n_{2,ps}\omega_{p,s\pm\Omega}} \right] \\
& \times f_{ps,ps} \tilde{A}_{p,s}^2 \tilde{A}_{p,s\mp\Omega}^* \exp \left[ -iz \sum_{n=1}^m \beta_{n,ps} \left( \frac{1 + (-1)^n}{n!} \right) (\pm\Omega)^n \right] \left. \right\} \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Pour normaliser les champs, nous faisons le changement de variable suivant :

$$\tilde{A}_{p,s} = \frac{\tilde{U}_{p,s}}{\sqrt{\int_{\mathcal{A}_\infty} |\Psi_{p,s}|^2 d\mathcal{A}}} \quad (2.20)$$

de sorte que  $|\tilde{U}_{p,s}|^2$  est une puissance. Nous réécrivons maintenant les équations couplées avec les définitions de  $A_{\text{eff}}$  et de  $\gamma$  données respectivement par (B.54) et (B.67). En supposant que l'aire effective change peu avec la fréquence et que l'absorption à deux photons est négligeable, nous obtenons :

$$\frac{d\tilde{U}_{p,s}}{dz} = i\gamma_{p,s} \left\{ |\tilde{U}_{p,s}|^2 \tilde{U}_{p,s} + \left[ 2 - f_R + f_R\tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) \right] |\tilde{U}_{s,p}|^2 \tilde{U}_{p,s} \right\} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{U}_{p,s\pm\Omega}}{dz} = & i\gamma_{p,s\pm\Omega} \left\{ \left[ 2 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] |\tilde{U}_{p,s}|^2 \tilde{U}_{p,s\pm\Omega} \right. \\
& + \left[ 2 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] |\tilde{U}_{s,p}|^2 \tilde{U}_{p,s\pm\Omega} \\
& + \left[ 2 - 2f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] \\
& \times \tilde{U}_{p,s} \tilde{U}_{s,p} \tilde{U}_{s,p\mp\Omega}^* \exp \left[ -iz \left( \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} (\pm\Omega)^n + \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,sp}}{n!} (\mp\Omega)^n \right) \right] \\
& + \left[ 2 - 2f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) \right] \\
& \times \tilde{U}_{p,s} \tilde{U}_{s,p}^* \tilde{U}_{s,p\pm\Omega} \exp \left[ -iz \left( \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} (\pm\Omega)^n - \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,sp}}{n!} (\pm\Omega)^n \right) \right] \\
& + \left[ 1 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] \\
& \times \tilde{U}_{p,s}^2 \tilde{U}_{p,s\mp\Omega}^* \exp \left[ -iz \sum_{n=1}^m \beta_{n,ps} \left( \frac{1 + (-1)^n}{n!} \right) (\pm\Omega)^n \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Les équations (2.21) et (2.22) définissent la dynamique de la perturbation lorsque celle-ci est faible (nous n'avons considéré que la perturbation au premier ordre). Bien que (2.21) puisse être résolue analytiquement, (2.22) ne peut pas l'être; nous devons résoudre les équations numériquement. De façon générale, si nous considérons d'autres effets, les équations non perturbées ne sont pas nécessairement solubles analytiquement. Pour résoudre, il faut remarquer que les équations non perturbées sont indépendantes des équations perturbées; nous pouvons donc les résoudre avec une méthode Runge-Kutta ou la méthode de tir décrite au chapitre 1 selon les conditions aux frontières.

Dans le cas des équations perturbées, nous voulons un diagramme de stabilité, c'est-à-dire le gain de la perturbation à chaque fréquence. La manière la plus simple d'obtenir ce diagramme est de résoudre matriciellement le système d'équations pour chaque fréquence, les valeurs propres obtenues nous donnant le gain de la solution. Bien que la perturbation soit linéaire, les équations perturbées dépendent des équations non-perturbées qui sont non-linéaires; nous ne pouvons donc pas les



résoudre analytiquement. Pour y remédier, nous posons que *localement* la puissance non-perturbée est constante, ce qui rend les équations perturbées linéaires et nous permet de trouver un diagramme de stabilité local. Nous tirons finalement le diagramme de stabilité global.

## 2.3 Solution locale

### 2.3.1 Solution locale non perturbée

Nous considérons donc que la puissance est constante localement, c'est-à-dire sur une tranche  $\Delta z$ . Bien que nous posions la puissance constante, la phase ne le sera pas pour autant. En prenant l'équation (2.21) et en ne conservant que les termes changeant la phase, nous trouvons comme solution locale non perturbée :

$$\tilde{U}_{p,s} = \sqrt{P_{p,s}} \exp \left\{ i\gamma_{p,s} [P_{p,s} + (2 - f_R)P_{s,p}]z \right\} = \sqrt{P_{p,s}} \exp(i\theta_{p,s}z) \quad (2.23)$$

où  $\theta_{p,s}$  est la phase non-linéaire.  $P_{p,s} = |\tilde{U}_{p,s}|^2$  est la puissance locale, c'est-à-dire sur la tranche  $\Delta z$  que nous étudions ; elle est considérée constante sur cette tranche. La solution (2.23) ne s'applique donc que sur cette tranche aussi.  $P_{p,s}(z)$  est calculée numériquement comme nous l'avons mentionné à la section précédente.

### 2.3.2 Solution locale perturbée

L'amplitude des perturbations étant faible, essayons de linéariser les équations perturbées. Nous substituons d'abord la solution non-perturbée (2.23) qui nous donne

les amplitudes  $\tilde{U}_{p,s}$  dans les équations perturbées (2.22).

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{U}_{p,s\pm\Omega}}{dz} = & i\gamma_{p,s\pm\Omega} \left\{ \left[ 2 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] P_{p,s} \tilde{U}_{p,s\pm\Omega} \right. \\
& + \left[ 2 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] P_{s,p} \tilde{U}_{p,s\pm\Omega} \\
& + \left[ 2 - 2f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] \sqrt{P_p P_s} \tilde{U}_{s,p\mp\Omega}^* \\
& \times \exp[i(\theta_p + \theta_s)z] \exp[-iz \left( \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} (\pm\Omega)^n + \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,sp}}{n!} (\mp\Omega)^n \right)] \\
& + \left[ 2 - 2f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) \right] \sqrt{P_p P_s} \tilde{U}_{s,p\pm\Omega} \exp[i(\theta_p - \theta_s)z] \\
& \times \exp[-iz \left( \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} (\pm\Omega)^n - \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,sp}}{n!} (\pm\Omega)^n \right)] + \left[ 1 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] \\
& \times P_{p,s} \tilde{U}_{p,s\mp\Omega}^* \exp[2i\theta_{p,s}z] \exp[-iz \sum_{n=1}^m \beta_{n,ps} \left( \frac{1 + (-1)^n}{n!} \right) (\pm\Omega)^n] \left. \right\} \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Nous voyons que les équations (2.24) dépendent de  $z$ , ce qui nous empêche de résoudre le système matriciellement. Nous pouvons toutefois nous affranchir de la dépendance en  $z$  en faisant le changement de variables suivant :

$$\tilde{U}_{p,s\pm\Omega} = \tilde{V}_{p,s\pm\Omega} \exp \left\{ i \left[ \theta_{p,s} - \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} (\pm\Omega)^n \right] z \right\} \quad (2.25)$$

Le changement de variables revient à se placer à mi-chemin du déphasage entre les perturbations. Il est intéressant de remarquer que la différence entre  $\tilde{U}_{p,s\pm\Omega}$  et  $\tilde{V}_{p,s\pm\Omega}$  n'est qu'un facteur de phase. Ainsi, les solutions  $\tilde{V}_{p,s\pm\Omega}$  sont les mêmes que celles de  $\tilde{U}_{p,s\pm\Omega}$  à un facteur de phase près. Puisque c'est la partie réelle de la valeur propre qui donne l'amplification, le diagramme de stabilité de  $\tilde{V}_{p,s\pm\Omega}$  sera le même que celui de

$\tilde{U}_{p,s\pm\Omega}$ . L'équation (2.24) se réécrit donc en remplaçant  $\theta_{p,s}$  par sa définition (2.23) :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{V}_{p,s\pm\Omega}}{dz} + i \left[ \gamma_{p,s} P_{p,s} + \gamma_{p,s} (2 - f_R) P_{s,p} - \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} (\pm\Omega)^n \right] \tilde{V}_{p,s\pm\Omega} = i \gamma_{p,s\pm\Omega} \left\{ \right. \\ \left[ 2 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] P_{p,s} \tilde{V}_{p,s\pm\Omega} + \left[ 2 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] P_{s,p} \tilde{V}_{p,s\pm\Omega} \\ + \left[ 2 - 2f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] \sqrt{P_p P_s} \tilde{V}_{s,p\mp\Omega}^* \\ + \left[ 2 - 2f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) \right] \sqrt{P_p P_s} \tilde{V}_{s,p\pm\Omega} \\ \left. + \left[ 1 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] P_{p,s} \tilde{V}_{p,s\mp\Omega}^* \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Soit en simplifiant :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{V}_{p,s\pm\Omega}}{dz} - i \left[ \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} (\pm\Omega)^n \right] \tilde{V}_{p,s\pm\Omega} = i \gamma_{p,s\pm\Omega} \left\{ \right. \\ \left[ 1 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] P_{p,s} \tilde{V}_{p,s\pm\Omega} + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) P_{s,p} \tilde{V}_{p,s\pm\Omega} \\ + \left[ 2 - 2f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p} \pm \Omega) \right] \sqrt{P_p P_s} \tilde{V}_{s,p\mp\Omega}^* \\ + \left[ 2 - 2f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) + f_R \tilde{h}_R(\omega_{p,s} - \omega_{s,p}) \right] \sqrt{P_p P_s} \tilde{V}_{s,p\pm\Omega} \\ \left. + \left[ 1 - f_R + f_R \tilde{h}_R(\pm\Omega) \right] P_{p,s} \tilde{V}_{p,s\mp\Omega}^* \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nous pouvons maintenant écrire les équations perturbées sous forme matricielle,

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{p+\Omega} \\ \tilde{V}_{p-\Omega}^* \\ \tilde{V}_{s+\Omega} \\ \tilde{V}_{s-\Omega}^* \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{p+\Omega} \\ \tilde{V}_{p-\Omega}^* \\ \tilde{V}_{s+\Omega} \\ \tilde{V}_{s-\Omega}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{p+\Omega} \\ \tilde{V}_{p-\Omega}^* \\ \tilde{V}_{s+\Omega} \\ \tilde{V}_{s-\Omega}^* \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

En constatant à la figure B.1 que  $\tilde{h}_R^*(-\omega) = \tilde{h}_R(\omega)$ , nous définissons les coefficients

$t_{jk}$  comme suit :

$$t_{11} = iD(\Omega) + i\gamma_{p+\Omega}[\Upsilon(\Omega)P_p + f_R\tilde{h}_R(\omega_p - \omega_s + \Omega)P_s] \quad (2.29a)$$

$$t_{12} = i\gamma_{p+\Omega}\Upsilon(\Omega)P_p \quad (2.29b)$$

$$t_{13} = i\gamma_{p+\Omega}[\Upsilon(\Omega) + \Upsilon(\omega_p - \omega_s)]\sqrt{P_p P_s} \quad (2.29c)$$

$$t_{14} = i\gamma_{p+\Omega}[\Upsilon(\Omega) + \Upsilon(\omega_p - \omega_s + \Omega)]\sqrt{P_p P_s} \quad (2.29d)$$

$$t_{21} = -i\gamma_{p-\Omega}\Upsilon(\Omega)P_p \quad (2.29e)$$

$$t_{22} = -iD(-\Omega) - i\gamma_{p-\Omega}[\Upsilon(\Omega)P_p + f_R\tilde{h}_R(\omega_s - \omega_p + \Omega)P_s] \quad (2.29f)$$

$$t_{23} = -i\gamma_{p-\Omega}[\Upsilon(\Omega) + \Upsilon(\omega_s - \omega_p + \Omega)]\sqrt{P_p P_s} \quad (2.29g)$$

$$t_{24} = -i\gamma_{p-\Omega}[\Upsilon(\Omega) + \Upsilon(\omega_s - \omega_p)]\sqrt{P_p P_s} \quad (2.29h)$$

$$t_{31} = i\gamma_{s+\Omega}[\Upsilon(\Omega) + \Upsilon(\omega_s - \omega_p)]\sqrt{P_p P_s} \quad (2.29i)$$

$$t_{32} = i\gamma_{s+\Omega}[\Upsilon(\Omega) + \Upsilon(\omega_s - \omega_p + \Omega)]\sqrt{P_p P_s} \quad (2.29j)$$

$$t_{33} = iD(\Omega) + i\gamma_{s+\Omega}[\Upsilon(\Omega)P_s + f_R\tilde{h}_R(\omega_s - \omega_p + \Omega)P_p] \quad (2.29k)$$

$$t_{34} = i\gamma_{s+\Omega}\Upsilon(\Omega)P_s \quad (2.29l)$$

$$t_{41} = -i\gamma_{s-\Omega}[\Upsilon(\Omega) + \Upsilon(\omega_p - \omega_s + \Omega)]\sqrt{P_p P_s} \quad (2.29m)$$

$$t_{42} = -i\gamma_{s-\Omega}[\Upsilon(\Omega) + \Upsilon(\omega_p - \omega_s)]\sqrt{P_p P_s} \quad (2.29n)$$

$$t_{43} = -i\gamma_{s-\Omega}\Upsilon(\Omega)P_s \quad (2.29o)$$

$$t_{44} = -iD(-\Omega) - i\gamma_{s-\Omega}[\Upsilon(\Omega)P_s + f_R\tilde{h}_R(\omega_p - \omega_s + \Omega)P_p] \quad (2.29p)$$

où

$$\Upsilon(\omega) = 1 - f_R + f_R\tilde{h}_R(\omega) \quad \text{et} \quad D(\Omega) = \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} \Omega^n \quad (2.30)$$

Nous avons maintenant la matrice de stabilité  $\mathbf{T}$  qui est bien indépendante de  $z$ . Cela signifie que les solutions  $\tilde{V}_{p,s\pm\Omega}$  sont des combinaisons linéaires d'exponentielles complexes. Pour déterminer la stabilité du système, il suffit de résoudre (2.28), ce qui revient à calculer les valeurs propres de  $\mathbf{T}$ . Les valeurs propres sont les exposants des exponentielles ; ainsi si une valeur propre est réelle et positive, il y aura amplification

de la perturbation correspondante. Puisqu'il n'y a qu'une phase de différence entre  $\tilde{V}_{p,s\pm\Omega}$  et  $\tilde{U}_{p,s\pm\Omega}$ , les conclusions obtenues seront les mêmes pour les deux solutions. Il est très laborieux de déterminer analytiquement les valeurs propres d'une matrice  $4 \times 4$ ; nous les déterminerons donc numériquement.

### 2.3.3 Calcul des valeurs et vecteurs propres

Notre problème est donc de trouver une méthode numérique nous permettant de calculer les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{T}$  de taille  $N \times N$ . Les méthodes pour résoudre ce problème sont peu nombreuses car la matrice  $\mathbf{T}$  est pleine (aucune symétrie à exploiter) et complexe (ce qui double le nombre d'inconnues). Nous avons choisi un algorithme basé sur la décomposition QR à cause de sa stabilité et parce qu'il nous permet de calculer facilement les vecteurs propres, qui nous seront utiles plus tard. L'algorithme de décomposition QR est expliqué à l'annexe C.

### 2.3.4 Stabilité locale

Nous avons maintenant tous les outils pour déterminer la stabilité locale de nos équations de propagation. Le diagramme de stabilité est obtenu en regardant la partie réelle des valeurs propres de  $T$  en fonction de la fréquence de perturbation  $\Omega$ .

La solution du système d'équations (2.28) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \tilde{V}_{p+\Omega}(z + \Delta z) \\ \tilde{V}_{p-\Omega}^*(z + \Delta z) \\ \tilde{V}_{s+\Omega}(z + \Delta z) \\ \tilde{V}_{s-\Omega}^*(z + \Delta z) \end{bmatrix} &= \mathbf{H} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{p+\Omega}(z) \\ \tilde{V}_{p-\Omega}^*(z) \\ \tilde{V}_{s+\Omega}(z) \\ \tilde{V}_{s-\Omega}^*(z) \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \Delta z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \Delta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 \Delta z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4 \Delta z} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{p+\Omega}(z) \\ \tilde{V}_{p-\Omega}^*(z) \\ \tilde{V}_{s+\Omega}(z) \\ \tilde{V}_{s-\Omega}^*(z) \end{bmatrix} \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice de passage donnée par :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

où les  $\lambda_j$  sont les valeurs propres,  $\vec{v}_j$  les vecteurs propres normalisés et  $\mathbf{H}$  la fonction de transfert local sur la section  $\Delta z$ . Ce que nous voulons toutefois, c'est calculer la stabilité *globale* du *laser*.

### 2.3.5 Exemple

Avant d'étudier le problème complet qui nous intéresse, examinons un exemple typique d'instabilité : l'instabilité de modulation de phase mutuelle. Pour ce faire, il suffit de calculer les valeurs propres de (2.28) en posant  $f_R = 0$  et donc  $\Upsilon(\omega) = 1$ . Les paramètres utilisés pour le calcul sont :

	Pompe	Stokes
Longueur d'onde ( $\mu\text{m}$ )	1,49	1,50
Puissance (W)	4,0	5,5
$\beta_1$ (ps/km)	4 877 483	4 877 647
$\beta_2$ (ps <sup>2</sup> /km)	-20,98	-21,98

Les valeurs propres calculées pour différentes fréquences de perturbation sont montrées à la figure (2.2).

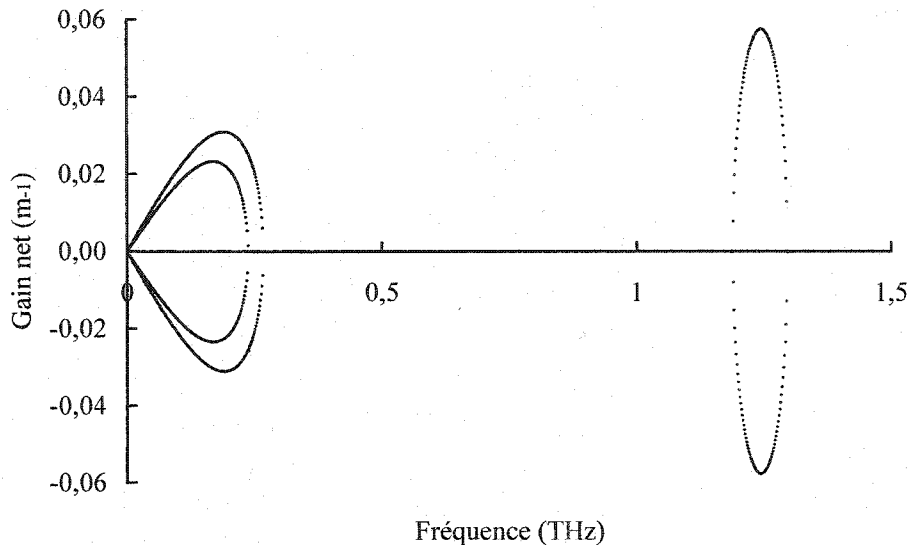


Figure 2.2 : Diagramme d'instabilité de modulation. Les deux lobes de gauche correspondent à une instabilité créée par l'auto-modulation de phase et la dispersion anormale pour chacun des champs. Le lobe de droite est une instabilité créée par la modulation de phase mutuelle et la dispersion.

La figure présente trois régions instables (où le gain est positif). Les deux régions instables de gauche se rapportent à chacun des champs, le gain le plus élevé correspondant au champ ayant la plus grande puissance. Ce lobe autour de la fréquence porteuse ( $\Omega = 0$ ) est causé par l'auto-modulation de phase et la dispersion. Il correspond à l'effet couramment nommé *instabilité de modulation*. Ce nom vient du fait que l'instabilité module un faisceau continu dans le temps de sorte que celui-ci peut former des pulses. Le gain de l'instabilité est d'autant plus grand que la puissance est élevée mais n'existe que dans le régime de dispersion anormale ( $\beta_2 < 0$ ). Cela s'explique par le mélange à quatre ondes (M4O). La zone d'instabilité est l'endroit où il y a accord de phase; la phase non-linéaire de l'AMP compense la phase de dispersion. Cet effet ne peut se produire que lorsque les signes des phases sont opposés

donc seulement dans le régime de dispersion anormale (puisque la non-linéarité de la silice est positive).

La zone d'instabilité de droite (autour de  $\Omega=1,25$  THz) est causée par la modulation de phase mutuelle. Le gain est proportionnel à la puissance des deux champs non perturbés. La région d'instabilité dépend de la différence des vitesses de groupe entre les deux champs non perturbés; plus la différence est faible plus la zone est large et proche de la porteuse. Il est important de noter que cette instabilité peut se produire dans le régime de dispersion normale. Cela s'explique encore par le M4O, en considérant six champs (deux champs de pompe et quatre champs de signaux). Chaque champ est couplé aux autres par dix termes de M4O. Dans ce cas, il y a toujours un terme qui est en accord de phase indépendamment du signe de la dispersion.

En regardant les vecteurs propres de chaque perturbation, nous constatons qu'il n'y a un couplage que lorsqu'il y a des instabilités. Autrement dit, les composantes des vecteurs propres sont toutes nulles à l'exception d'un terme sauf quand il y a un gain. Les instabilités de modulation proviennent donc d'un couplage entre les perturbations et non seulement d'un couplage avec la pompe [Huang 1992], [Yu & McKinstrie 1998].

## 2.4 Solution globale

Nous savons désormais comment déterminer la stabilité des équations de propagation sur une tranche  $\Delta z$  à la position  $z$ ; nous désirons trouver la stabilité sur toute la longueur de propagation, autrement dit, de toute la cavité laser.

De façon générale, il faut commencer par trouver  $P_{p,s}(z)$  en résolvant l'équation (2.21) avec les conditions aux limites du laser. Nous discrétisons par la suite la longueur  $L$  en  $M$  sections et nous supposons que la puissance  $P_{p,s}(z_m)$  sur chacune des sections centrée en  $z_m$  est constante. Nous pouvons alors déterminer une matrice de stabilité locale  $\mathbf{T}_m$  et ainsi une matrice de transfert locale  $\mathbf{H}_m$  sur chacune de ces



sections.

La matrice de transfert globale est obtenue en multipliant toutes les matrices de transfert locales. Il faut toutefois tenir compte des conditions aux limites qui peuvent coupler les différentes amplitudes  $V_{p,s\pm\Omega}$  entre elles.

$$\mathbf{H} = \left[ \prod_{m=M}^1 \mathbf{H}_m \right] \mathbf{C}_L \quad (2.33)$$

La matrice  $\mathbf{C}_L$  permet d'inclure les conditions aux limites dans la matrice de transfert globale. Pour déterminer le diagramme de stabilité global, il suffit de tracer la partie réelle du logarithme des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{H}$  en fonction de la fréquence de perturbation. Si la valeur est positive, il y a amplification de la perturbation. Nous prenons le logarithme pour voir le gain net (le gain en  $\text{m}^{-1}$  multiplié par la longueur).

Cette technique s'applique à n'importe quel système qui peut être décrit par une équation de propagation. Il est donc possible de déterminer la fonction de transfert local de chaque élément du laser et de les multiplier entre elles pour obtenir la fonction de transfert globale du laser lui-même.

## 2.5 Exemple

Nous appliquons maintenant la méthode sur un exemple relativement simple, un laser Raman en anneau à une onde de Stokes comme celui à la figure 2.3. Si nous voulions l'appliquer au laser Raman du chapitre 1, il nous faudrait développer 28 équations de perturbation (pompe + 6 ondes de Stokes) x 2 directions x 2 complexes conjugués) et donc des matrices de transfert de  $28 \times 28$ . Le système d'équations (2.27) que nous avons développé décrit exactement la propagation dans ce laser. Il nous faut simplement définir les conditions limites. Les paramètres physiques du laser sont donnés dans le tableau 2.3. Le coupleur est un multiplexeur 50/50 pour la pompe et 25/75 pour l'onde de Stokes.

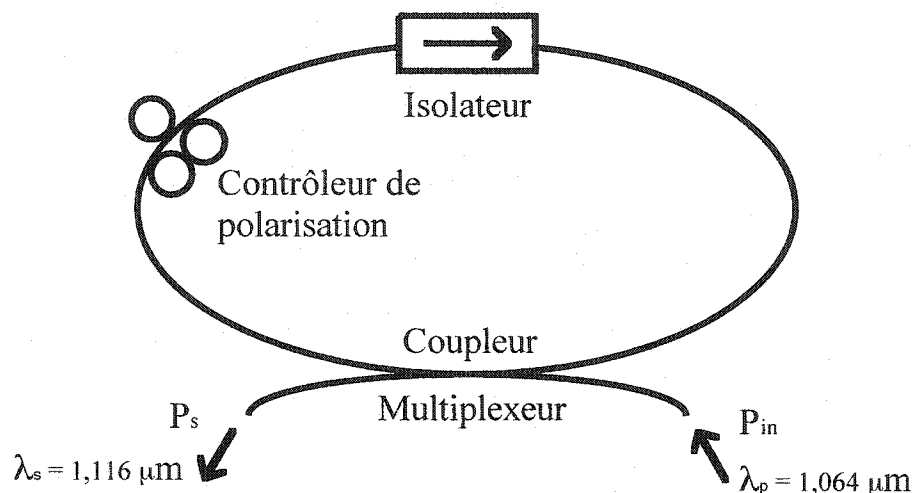


Figure 2.3 : Laser Raman en anneau ; le coupleur sert à la fois à injecter la pompe et à recueillir la première onde de Stokes. Le contrôleur de polarisation permet de conserver une polarisation linéaire. L'isolateur élimine les champs contra-propagatif.

### 2.5.1 Solution non perturbée

Nous calculons d'abord la solution non perturbée avec les équations (2.21) (en négligeant l'absorption à deux photons). Il est important de remarquer que ce que nous voulons c'est la *puissance* et non l'amplitude car nous avons exprimé la solution locale en fonction de la puissance. La cavité laser possède les caractéristiques suivantes :

Longueur de la cavité	50 m
Puissance d'injection	6 W
Coefficient de réflexion de la pompe	0,5
Coefficient de réflexion de l'onde de Stokes	0,75

Avec les conditions aux frontières :

$$P_{p,s}(0) = R_{p,s}P_{in} + T_{p,s}P_{p,s}(L) \quad (2.34)$$

paramètre	pompe	onde de Stokes
$n_g$	1,4689236	1,4676546
$\beta_1$	4 899 801 ps/km	4 895 569 ps/km
$\beta_2$	20 ps <sup>2</sup> /km	8 ps <sup>2</sup> /km
$f_R$	0,18	0,18
$n_2$	$2,6 \cdot 10^{-20}$ m <sup>2</sup> /W	$2,6 \cdot 10^{-20}$ m <sup>2</sup> /W
$A_{\text{eff}}$	50 $\mu\text{m}^2$	50 $\mu\text{m}^2$
$\gamma$	$3,0707 \cdot 10^{-3}$ m <sup>-1</sup> W <sup>-1</sup>	$2,9276 \cdot 10^{-3}$ m <sup>-1</sup> W <sup>-1</sup>
$g$	$2,1 \cdot 10^{-3}$ m <sup>-1</sup> W <sup>-1</sup>	$2,0 \cdot 10^{-3}$ m <sup>-1</sup> W <sup>-1</sup>

Tableau 2.3 : Paramètres de la fibre du laser Raman en anneau.

nous obtenons la distribution de puissance présentée à la figure 2.4. Connaissant la puissance de la cavité, nous pouvons calculer le diagramme de stabilité locale.

### 2.5.2 Analyse de stabilité locale

En substituant la puissance de la pompe et de l'onde de Stokes dans les équations de perturbation sur chacune des tranches, nous trouvons tous les diagrammes de stabilité locale. La figure 2.5 est le diagramme de stabilité pour la première tranche  $z = 0$ . La figure est symétrique par rapport à  $\Omega = 0$ . Nous voyons une amplification correspondant à la courbe de gain Raman sur la pompe à la fréquence  $\omega_p + \Omega$ . Il n'y pas de lobes secondaires dus à l'instabilité de modulation causée par l'auto-modulation de phase car la dispersion est positive. Nous ne voyons pas non plus d'instabilités causées par la modulation de phase mutuelle car la différence de vitesse de groupes entre les deux champs (pompe et onde de Stokes) est trop grande.

Nous voyons que le champ de l'onde de Stokes se trouve à être au centre de la courbe de gain (la courbe  $S^+$  étant la courbe de gain au-delà de 13 THz), ce qui n'est guère surprenant considérant que c'est à cet endroit que nous avons placé la porteuse  $\omega_s$ . Nous voyons ainsi un élargissement autour de la porteuse ainsi qu'un lobe un peu plus loin. Toutefois, l'analyse est seulement valable pour des fréquences inférieures à la moitié de  $\omega_p - \omega_s$ , soit environ 6,5 THz, pour éviter le recouvrement des perturbations.

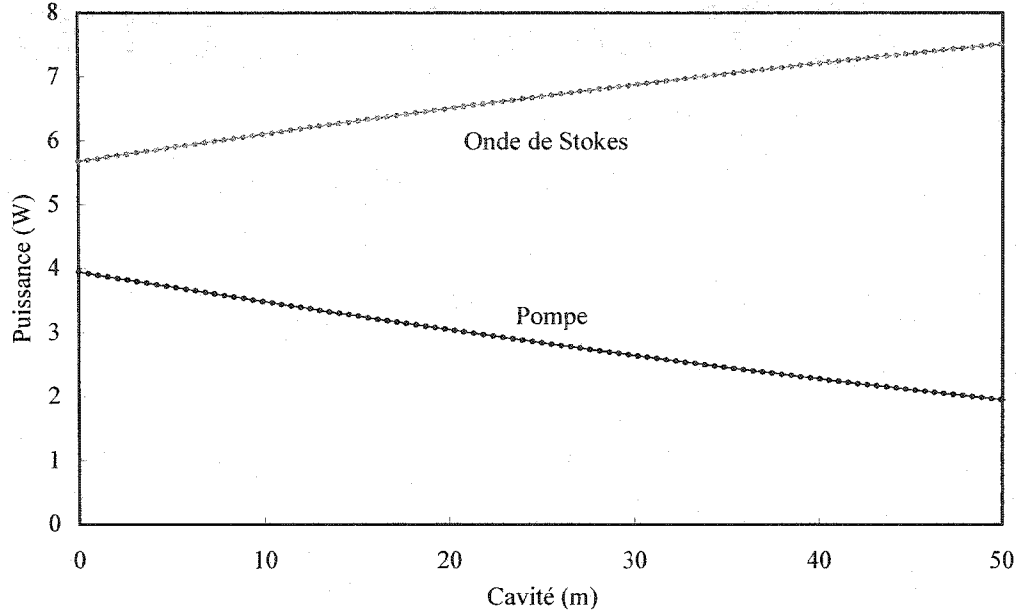


Figure 2.4 : Puissance dans la cavité en anneau ;  $L = 50$  m,  $P_{\text{inj}} = 6$  W,  $R_p = 0,5$  et  $R_s = 0,75$ . Seule la pompe à  $1,064 \mu\text{m}$  est injectée.

### 2.5.3 Analyse de stabilité du laser

Pour calculer la stabilité du laser, nous trouvons d'abord la fonction de transfert comme mentionné précédemment. Il nous faut ensuite calculer la matrice des conditions aux limites. Les conditions aux limites s'écrivent simplement :

$$\tilde{U}_{p,s\pm\Omega}^{(k+1)} = \tau_{p,s} \tilde{U}_{p,s\pm\Omega}^{(k)} \quad (2.35)$$

en supposant que les coefficients de transmission  $\tau_{p,s}$  du coupleur sont constants en fréquence. L'indice  $k$  réfère à la  $k$ ième itération dans la boucle. Il faut toutefois faire attention : notre matrice de transfert  $H$  est écrite pour la variable  $\tilde{V}$  et non  $\tilde{U}$ . Les conditions aux limites deviennent donc :

$$\tilde{V}_{p,s\pm\Omega}^{(k+1)} = \tau_{p,s} \exp \left\{ i \left[ \theta_{p,s} - \sum_{n=1}^m \frac{\beta_{n,ps}}{n!} (\pm\Omega)^n \right] z \right\} \tilde{V}_{p,s\pm\Omega}^{(k)} \quad (2.36)$$

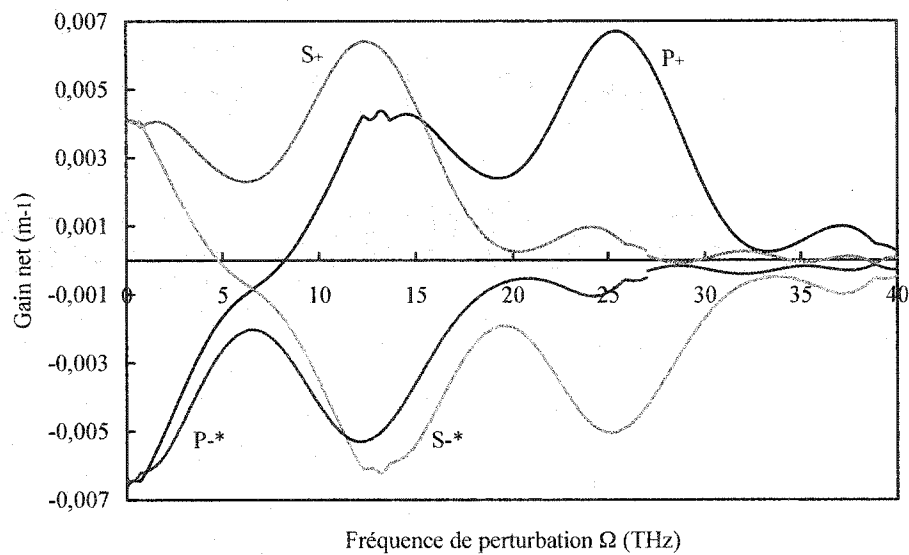


Figure 2.5 : Diagramme de stabilité locale de la tranche centrée en  $z = 0$ . Les quatre courbes représentent les perturbations à  $\omega_{p,s} \pm \Omega$ .

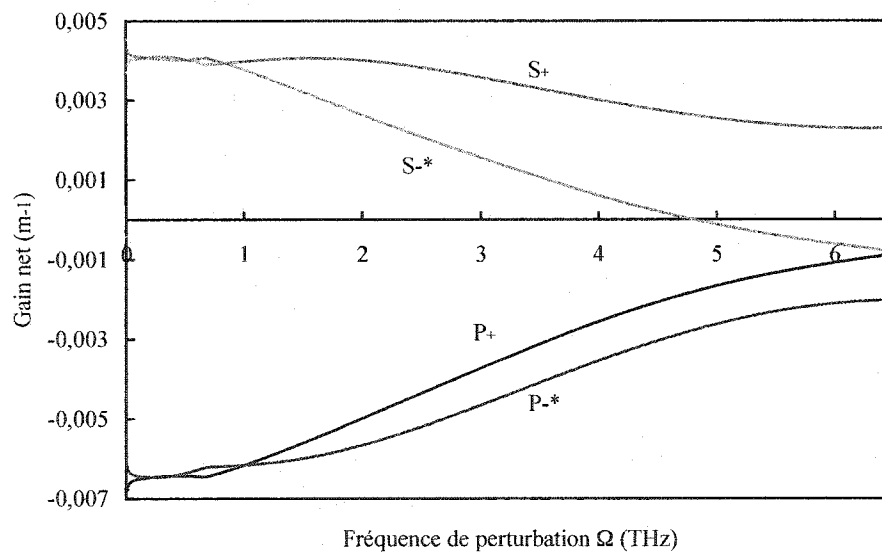


Figure 2.6 : Diagramme de stabilité locale centrée en  $z = 0$ . Les quatre courbes représentent les perturbations à  $\omega_{p,s} \pm \Omega$ . La plage est limitée à 6,5 THz pour éviter le recouvrement des perturbations.

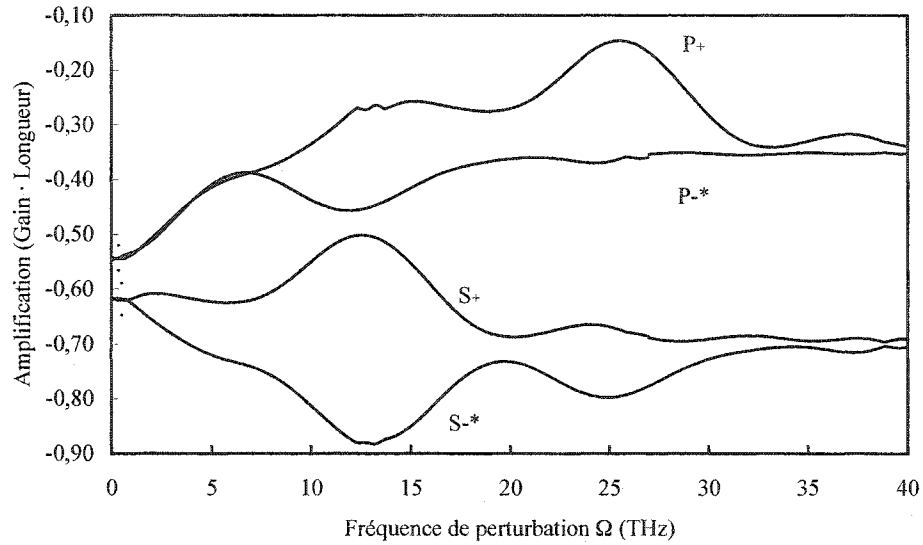


Figure 2.7 : Diagramme de stabilité globale. Les quatre courbes représentent les perturbations à  $\omega_{p,s} \pm \Omega$ .

En calculant le déterminant de (2.33) pour chaque fréquence, nous obtenons le diagramme de stabilité à la figure 2.7. Encore une fois, nous le limitons à 6,5 THz pour éviter les recouvrements, ce qui nous donne le graphique 2.8.

Nous voyons par rapport à la figure 2.5 que l'effet du coupleur est de diminuer le facteur d'amplification. En ajustant le taux de couplage, il est possible d'augmenter ou diminuer l'amplification, puisqu'elle dépend de la puissance dans la cavité. Nous observons également des pics à basses fréquences, comme le montre mieux la figure 2.9.

Si nous regardons les vecteurs propres, nous constatons qu'ils n'y a pas de couplage entre les perturbations, sauf où il y a des pics (à basses fréquences). Les quatre courbes représentent donc les perturbations à  $\omega_{p,s} \pm \Omega$ . Pour les pics, les vecteurs propres indiquent qu'il y a couplage entre les perturbations  $\omega_p \pm \Omega$  ou entre  $\omega_s \pm \Omega$ . Cela provient donc de l'auto-modulation de phase, ce qui semble a priori impossible puisque nous sommes dans le régime de dispersion positive. Toutefois, ces pics sont bien dus à

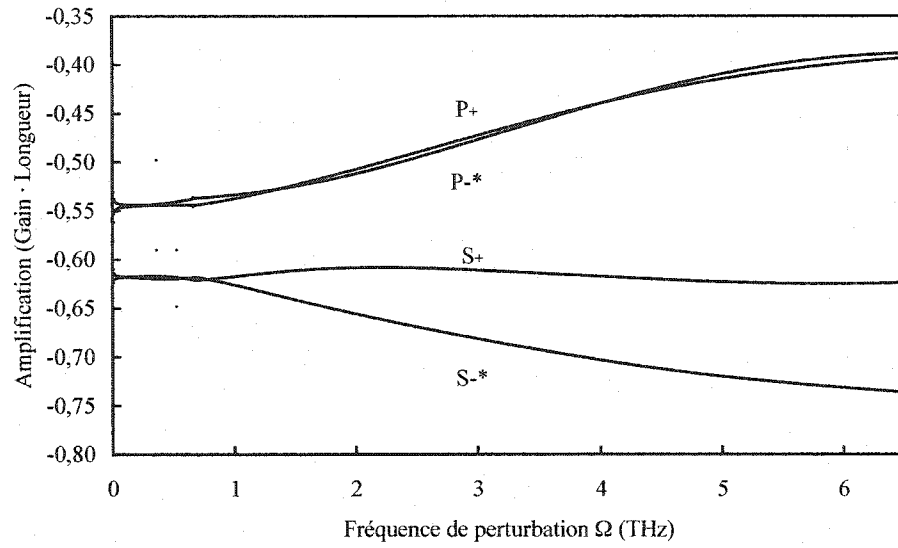


Figure 2.8 : Détail du diagramme de stabilité globale. Les quatre courbes représentent les perturbations à  $\omega_{p,s} \pm \Omega$

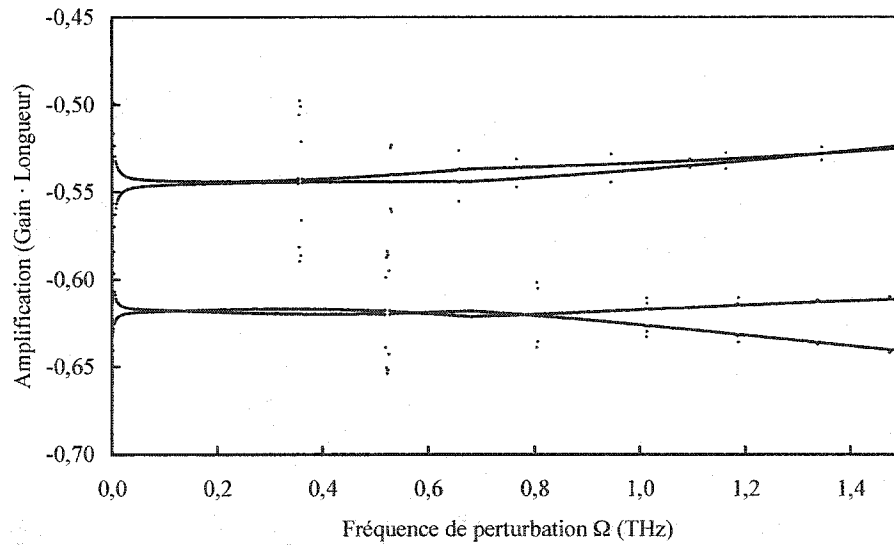


Figure 2.9 : Détail du diagramme de stabilité globale. Les quatre courbes représentent les perturbations à  $\omega_{p,s} \pm \Omega$ . Des pics de gains sont visibles à certaines fréquences.

l'auto-modulation de phase *lorsque la puissance varie* lors de la propagation. Le détail de l'analyse est montré à l'annexe D. Les pics génèrent des instabilités de modulation pouvant mener le laser à former des impulsions (auto-pulser) à ces fréquences si leur gain est positif. Toutefois, la largeur des pics étant très étroite (inférieur à 1 nm), il est très difficile de les exploiter pour faire pulser le laser.

Le gain Raman ne peut toutefois pas amener le laser à auto-pulser, même si le gain est positif. L'effet Raman provient d'un couplage entre la pompe et la perturbation indépendant de leurs phases. Ainsi, il ne cause pas de relation de phase *entre* les perturbations, relations de phase qui sont à l'origine des instabilités de modulation. Il ne faut cependant pas oublier que l'effet Raman contribue en partie à l'AMP et à la MPM par le biais du paramètre  $\gamma$ . Ainsi, s'il y avait des instabilités de modulations causées par l'AMP ou par la MPM, l'effet Raman changerait légèrement leur gain.

Nous ne voyons pas les lobes d'amplifications dus à la modulation de phase mutuelle car la différence des vitesses de groupe est trop grande et/ou la puissance est trop faible. Les perturbations périodiques typiques des laser en anneau [Coen & Haelterman 1997] [McLaughlin, Moloney & Newell 1985] ne sont pas présentes car nous n'avons considéré que les perturbations générées sur un tour dans la boucle. Autrement dit, nous ne tenons pas compte de la réinjection des perturbations dans la boucle.

En bref, nous avons développé une méthode nous permettant d'analyser la stabilité de cavités laser élément par élément, en déterminant des fonctions de transfert pour chaque élément. L'analyse ne dépend pas de l'excitation à l'entrée de ces fonctions de transfert mais simplement des fonctions elles-mêmes ; elles dépendent seulement de la solution non-perturbée du laser. L'analyse de stabilité nous permet de déterminer si le laser peut auto-pulser et à quelle fréquence il peut le faire. Nous en déduisons que le laser Raman est fondamentalement stable : les pics d'instabilités sont trop étroits spectralement pour permettre au laser d'auto-pulser. Pour s'assurer de la stabilité, il est quand même préférable d'opérer le laser dans la région du gain se situant au-delà



d'un décalage de 5 THz. Rappelons finalement que l'instabilité dans le laser menant à l'auto-pulsation est générée par la variation de puissance dans la fibre et non par la nature même de l'interaction Raman.

Pour poursuivre l'analyse, il faudrait faire l'analyse du laser en mode pulsé. Différentes techniques pour faire pulser le laser doivent être explorées car, comme nous l'avons vu, les conditions pour faire auto-pulser le laser sont difficiles à réaliser. Cela nous permettrait de trouver les solutions pulsées du laser. Une analyse de stabilité pourrait alors être faite sur les solutions pulsées, afin de déterminer la stabilité du laser en régime pulsé.

## Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons fait l'analyse d'un laser Raman en cascades linéaire. Nous avons trouvé une solution analytique qui s'approche à 1% de la solution numérique exacte. La solution analytique nous a permis de déterminer des lois d'invariance entre le gain, l'absorption la longueur de la cavité et la qualité des réflecteurs. L'optimisation de la cavité est facile à faire avec la solution analytique et se transpose facilement à d'autres cavités avec les lois d'invariance. Nous avons déterminé que la cavité doit être d'autant courte que les réflecteurs intermédiaires sont de bonne qualité et l'absorption importante. De plus, la puissance de sortie est plus grande lorsque le miroir de sortie à une faible réflectivité (entre 10% et 20%).

Nous avons ensuite étudié numériquement le régime transitoire de ce laser. Nous avons remarqué que le laser prend quelques dizaines de microsecondes pour atteindre le régime stationnaire, ce qui correspond à une quarantaine d'allers-retours dans la cavité. De plus, des pics de puissance de plusieurs de dizaines de Watts surviennent lors du régime transitoire. Ces pics ont une durée de quelques microsecondes. L'analyse du régime transitoire nous permet aussi de bien voir la dynamique du pompage Raman : le transfert de puissance dépend à la fois de la puissance pompe et de la puissance du signal.

L'analyse de stabilité nous a montré que le gain Raman, bien qu'il amène l'amplification de perturbations, n'amène pas d'instabilité de modulation. Le gain Raman ne fait donc qu'une amplification du bruit. Toutefois, lorsqu'il y a de l'amplification Raman dans un milieu, il y a forcément appauvrissement de la pompe et amplifi-

cation du signal. Nous avons démontré que cette variation de puissance amène une instabilité de modulation due à l'auto-modulation de phase, même dans le régime de dispersion positive. L'instabilité se manifeste sous forme de pics périodiques. Cette instabilité apparaîtrait également lorsqu'il y a un changement de dispersion lors de la propagation.

L'étape suivante dans l'analyse est de déterminer les techniques permettant au laser de pulser et d'étudier la stabilité des solutions en régime pulsé.

## Bibliographie

- AGRAWAL, G.P., *Nonlinear fiber optics*, 3 éd., Academic Press (2001).
- AU YEUNG, J. & YARIV, A., Theory of CW Raman oscillation in optical fibers. *J. Opt. Soc. Am.*, **69**(6) (1979).
- BERTONI, A. & REALI, G. C., 1.24  $\mu\text{m}$  cascaded Raman laser for 1.31  $\mu\text{m}$  Raman fiber amplifiers. *Applied Physics B*, **67** (1998).
- BLOW, K. J. & WOOD, D., Theoretical description of transient stimulated Raman scattering in optical fibers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **25**(12) (1989).
- BUFETOV, I. A. & DIANOV, E. M., A simple analytic model of a cw multicascade fibre Raman laser. *Soviet Journal of Quantum Electronics*, **30**(10) (2000).
- BURES, J., *Technologie de l'optique guidée*, Ecole Polytechnique de Montréal (2001).
- CHEN, C.-J., WAI, P. K. & MENYUK, C. R., Self-starting of passively mode-locked lasers with fast saturable absorbers. *Optics Letters*, **20**(4) (1994).
- CIERULLIES, S., RENNER, H. & BRINKMEYER, E., Numerical optimization of multi-wavelength and cascaded Raman fiber lasers. *Optics Communications*, **217** (2003).
- COEN, S. & HAEFTERMAN, M., Modulational instability induced by cavity boundary conditions in a normally dispersive optical fiber. *Physical Review Letters*, **79**(21) (1997).

- DE MATOS, C. J. S., CHESTNUT, D. A. & TAYLOR, J. R., Multi-wavelength, continuous wave fibre Raman ring laser operating at  $1.55\text{ }\mu\text{m}$ . *Electronics letters*, **37**(13) (2001).
- DIANOV, E. M., GREKOV, M. V., BUFETOV, I. A. & POKHOROV, A. M., CW high power  $1.24\text{ }\mu\text{m}$  and  $1.48\text{ }\mu\text{m}$  Raman lasers based on low loss phosphosilicate fibre. *Electronics letters*, **33**(18) (1997).
- GRUBB, S. G., ERDOGAN, T. & BECKER, P. C.,  $1.3\text{ }\mu\text{m}$  cascaded Raman amplifier in germanosilicate fibers. *Conf. Optical Amplifiers and their applications* (1993).
- HEADLEY, C. & AGRAWAL, G. P., Noise characteristics and statistics of picosecond Stokes pulses generated in optical fibers through stimulated Raman scattering. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **31**(11) (1995).
- HEADLEY, C. & AGRAWAL, G. P., Unified description of ultrafast stimulated Raman scattering in optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, **13**(10) (1996).
- HELLWARTH, R.W., OWYOUNG, A. & GEORGE, N., Origin of the nonlinear refractive index of liquid  $\text{CCl}_4$ . *Physical Review A*, **4**(6) (1971).
- HU, J., MARKS, B. S., ZHANG, Q. & MENYUK, C. R., A shooting algorithm to model backward-pumped Raman amplifiers. Dans *IEEE-LEOS 16th annual meeting*, 246-247 (paper Tul3).
- HUANG, W., A couled-mode analysis of modulation instability in optical fibers. *Journal of Lightwave Technology*, **10**(2) (1992).
- JACKSON, STUART D. & MUIR, PAUL H., Theory and numerical simulation of nth-order cascaded Raman fiber lasers. *J. Opt. Soc. Am. B*, **18**(9) (2001).
- KARASEK, M. & MENIF, M., Channel addition/removal response in Raman fiber amplifiers: Modeling and experimentation. *Journal of Lightwave Technology*, **20**(9) (2002).

- MAMYSHEV, P. V. & CHERNIKOV, S. V., Ultrashort-pulse propagation in optical fibers. *Optics Letters*, **15**(19) (1990).
- MANASSAH, J. T., Self-phase modulation of incoherent light. *Optics Letters*, **15**(6) (1990).
- MANASSAH, J. T., Self-phase modulation of incoherent light revisited. *Optics Letters*, **16**(21) (1991).
- MANDEL, L. & WOLF, E., *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press (1995).
- MCLAUGHLIN, D. W., MOLONEY, J. V. & NEWELL, A. C., New class of instabilities in passive optical cavities. *Physical Review Letters*, **7**(7) (1985).
- MIN, B., LEE, W. J. & PARK, N., Efficient formulation of Raman amplifier propagation equations with average power analysis. *IEEE Photonics Technology Letters*, **12**(11) (2000).
- MORITA, I., TANAKA, K. & EDAGAWA, N., Benefit of Raman amplification in ultra-long distance 40 gbit/s-based wdm transmission using dispersion-flattened fibre span. *Electronics letters*, **37**(8) (2001).
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. & FLANNERY, B. P., *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press (1992).
- RENNER, H., CIERULLIS, S. & KRAUSE, M., Scaling rules for Raman fiber lasers. *Proceedings OFC 2003*, 1 (2003).
- RINI, MATTEO, CRISTIANI, ILARIA & DEGIORGIO, VTTORIO, Numerical modeling and optimization of cascaded CW Raman fiber lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **36**(10) (2000).

- SHELBY, R. M., LEVENSON, M. D. & BAYER, P. W., Guided acoustic-wave Brillouin scattering. *Physical Review B*, **31**(8) (1985).
- STOLEN, R. H., GORDON, J. P., TOMLINSON, W. J. & HAUS, H. A., Raman response function of silica-core fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, **6**(6) (1989).
- VAREILLE, G., AUDOUIN, O. & DESURVIRE, E., Numerical optimisation of power conversion efficiency in 1480 nm multi-Stokes Raman fibre lasers. *Electronics Letters*, **34**(7) (1998).
- YU, M. & MCKINSTRIE, C. J., Temporal modulation instabilities of counterpropagating waves in a finite dispersive kerr medium i. theoretical model and analysis. *J. Opt. Soc. Am. B*, **15**(2) (1998).
- ZWILLINGER, D., *Handbook of Differential Equations*, Academic Press (1989).

# Annexe A

## Transformée de Fourier

### A.1 Définitions

La transformée de Fourier exponentielle d'une fonction  $F(t)$  est définie comme :

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt = \mathcal{F}\{F(t)\} \quad (\text{A.1})$$

et la transformée inverse donnée par :

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}^{-1}\{F(t)\}. \quad (\text{A.2})$$

La transformée de Fourier est particulièrement utile pour résoudre les équations différentielles car la dérivée temporelle devient une multiplication par  $-i\omega$  dans le domaine spectral.

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dF(t)}{dt}\right\} = -i\omega \tilde{F}(\omega) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\left\{\frac{d^n F(t)}{dt^n}\right\} = (-i\omega)^n \tilde{F}(\omega) \quad (\text{A.3})$$



## A.2 Propriétés

Quand on module une fonction dans le domaine du temps, on fait un décalage dans le domaine spectral ou encore une convolution par un pic de Dirac.

$$\mathcal{F}\{F(t)e^{-i\omega_0 t}\} = \tilde{F}(\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = \tilde{F}(\omega - \omega_0) \quad (\text{A.4})$$

où le symbole  $*$  représente le produit de convolution. Le produit de convolution de deux fonctions  $F(t)$  et  $G(t)$  est défini par :

$$F(t) * G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - \tau) \cdot G(\tau) d\tau \quad (\text{A.5})$$

Le produit de convolution se traduit dans le domaine spectral par une multiplication.

$$\mathcal{F}\{F(t) * G(t)\} = \tilde{F}(\omega) \cdot \tilde{G}(\omega) \quad (\text{A.6})$$

Finalement, la relation de Parseval est utile pour relier la puissance dans le domaine temporel à la puissance dans le domaine spectral.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)G^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega)\tilde{G}^*(\omega) d\omega \quad (\text{A.7})$$

## Annexe B

### Équations de propagation

Dans cette annexe, nous développons les équations de propagation d'impulsions dans les fibres optiques à partir des équations de Maxwell, tout en essayant de rester dans le cas le plus général possible. Nous en déduisons ensuite les équations gouvernant la croissance des ondes de Stokes lors de la propagation de champs continus.

#### B.1 Équation d'onde

Établissons tout d'abord l'équation d'onde dans un milieu homogène à partir des équations de Maxwell. Considérons les équations de Maxwell sous leur forme différentielle.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\text{où} \quad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{M}}. \quad (\text{B.2})$$

Il est à noter que toutes les variables sont fonction de l'espace et du temps et sont des quantités réelles dans le domaine du temps. Puisque les fibres optiques sont faites de silice, posons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 1** *La silice est un milieu diélectrique donc non conducteur et non magné-*

tique. Ainsi,  $\vec{\mathcal{J}} = \vec{0}$ ,  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$  et  $\mu = \mu_0$ .

En réécrivant les équations de Maxwell (B.1) avec ces conditions, nous obtenons les équations suivantes :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad (\text{B.3a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho \quad (\text{B.3b})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (\text{B.3c})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = \vec{\nabla} \cdot \mu_0 \vec{\mathcal{H}} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0 \quad (\text{B.3d})$$

$$\text{où} \quad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}}. \quad (\text{B.4})$$

Soient les propriétés mathématiques suivantes :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0. \quad (\text{B.5})$$

En prenant le rotationnel de part et d'autre de l'équation (B.3a) et en y insérant (B.3c) et (B.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}) &= -\mu_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{D}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{P}}}{\partial t^2} \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\nabla}^2 \vec{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

**Approximation 1** Nous considérons qu'il n'y a pas de charge statique et que le milieu est homogène, c'est-à-dire que la polarisation ne dépend pas des coordonnées spatiales. Cela implique que nous traitons les modes transverses de la fibre de façon scalaire. Il s'ensuit que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{D}} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$  et donc que :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{\mathcal{E}} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{P}}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{P}}}{\partial t^2} \quad (\text{B.7})$$

Nous trouvons ainsi l'équation d'onde lorsqu'il y a polarisation du matériau. Il nous faut maintenant définir la polarisation.

## B.2 Polarisations

La polarisation dans un matériau est sa réaction au champ qui lui est appliqué. Nous considérons ici la contribution électronique (causée par le déplacement des électrons avec le champ) et la contribution moléculaire (causée par la vibration du matériau avec le champ). Bien que la polarisation ait une dépendance d'un ordre quelconque en  $\vec{\mathcal{E}}$ , les ordres supérieurs sont moins importants.

**Approximation 2** *Nous considérons la polarisation jusqu'à l'ordre 3 (dépendance du champ au cube) ainsi qu'une polarisation de bruit, soit  $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}^{(L)} + \vec{\mathcal{P}}^{(2)} + \vec{\mathcal{P}}^{(3)} + \vec{\mathcal{P}}^{(\text{bruit})}$  où  $\vec{\mathcal{P}}^{(L)}$  est la polarisation linéaire.*

**Hypothèse 2** *Puisque la silice est un milieu isotrope, il est centro-symétrique ; il faut donc que  $\vec{\mathcal{P}}(-\vec{\mathcal{E}}) = -\vec{\mathcal{P}}(\vec{\mathcal{E}})$ . Ainsi toutes les polarisations non-linéaires paires sont nulles.*

$$\vec{\mathcal{P}}^{(2)} = \vec{0}$$

Nous pouvons donc ainsi écrire la polarisation comme :

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}^{(L)} + \vec{\mathcal{P}}^{(3)} + \vec{\mathcal{P}}^{(\text{bruit})} \quad (\text{B.8})$$

En substituant la polarisation dans (B.7), l'équation d'onde devient :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{P}}^{(L)}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{P}}^{(3)}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{P}}^{(\text{bruit})}}{\partial t^2} \quad (\text{B.9})$$

Écrivons maintenant chacune des polarisations de manière explicite. Pour ce faire, nous posons deux approximations sur les polarisations.

De l'approximation 1, nous déduisons que tous les temps de réponse sont les mêmes pour tous les champs puisque la silice est un milieu homogène et isotrope.

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t - t_1, t - t_2, t - t_3) : \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t_1) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t_2) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t - t') : \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') dt'\end{aligned}$$

où  $:$  symbolise un produit tensoriel.

**Approximation 3** *Nous considérons que tous les champs ont la même direction de polarisation et, que de plus, cette polarisation est rectiligne. Ceci nous permet de remplacer le produit tensoriel par un produit simple.*

**Approximation 4** *Nous supposons que la polarisation non-linéaire est incohérente et donc que la susceptibilité ne s'applique qu'à l'intensité optique. Autrement dit, nous ignorons toutes les interactions non-linéaires nécessitant qu'il y ait accord de phase entre les différents champs.*

Les polarisations s'écrivent ainsi [Hellwarth, Owyong & George 1971], [Blow & Wood 1989] :

$$\vec{\mathcal{P}}^{(L)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t - t') \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') dt' \quad (\text{B.10})$$

$$\vec{\mathcal{P}}^{(3)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(t - t') \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') dt' \quad (\text{B.11})$$

$$\vec{\mathcal{P}}^{(bruit)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} R_N(t - t') F_N(t') \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') dt'. \quad (\text{B.12})$$

Dans l'expression du bruit  $F_N$  est la force aléatoire de Langevin représentant les vibrations des molécules de silice et  $R_N$  convertit  $F_N$  en susceptibilité [Headley & Agrawal 1995].

**Approximation 5** Dans ce qui suit, nous négligeons le bruit,  $\vec{P}^{(bruit)}(\vec{r}, t) = \vec{0}$ .

Puisque le pompage Raman se fait entre deux fréquences, nous considérons que le champ électrique se sépare autour de deux fréquences  $\omega_p$  et  $\omega_s$ , sans toutefois le moduler autour de ces deux fréquences. Le champ électrique réel  $\vec{\mathcal{E}}$  prend donc la forme :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \vec{E}_p(\vec{r}, t) + \vec{E}_s(\vec{r}, t) \right] + c.c. \right\} \quad (\text{B.13})$$

où *c.c.* est le complexe conjugué de l'expression entre crochets. Le champ  $E_j$  est une quantité complexe par opposition à  $\vec{\mathcal{E}}$  qui lui est réel. Dans le calcul de la polarisation, nous avons besoin du produit  $\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ . Calculons-le en utilisant (B.13):

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} |\vec{E}_p|^2 + \frac{1}{2} |\vec{E}_s|^2 + \frac{1}{2} \vec{E}_p \vec{E}_s^* + \frac{1}{2} \vec{E}_p^* \vec{E}_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \vec{E}_p \vec{E}_s + \frac{1}{2} \vec{E}_p^* \vec{E}_s^* + \frac{1}{4} \vec{E}_p^2 + \frac{1}{4} \vec{E}_p^{*2} + \frac{1}{4} \vec{E}_s^2 + \frac{1}{4} \vec{E}_s^{*2} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Réécrivons les polarisations en remplaçant (B.14) et en utilisant l'expression du champ (B.13) dans (B.10)-(B.11) :

$$\vec{\mathcal{P}}^{(L)}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t - t') \left[ \vec{E}_p(\vec{r}, t') + \vec{E}_s(\vec{r}, t') \right] dt' + c.c. \quad (\text{B.15})$$

La polarisation de troisième ordre s'écrit alors :

$$\vec{\mathcal{P}}^{(3)}(\vec{r}, t) = \vec{P}_p^{(3)}(\vec{r}, t) + \vec{P}_s^{(3)}(\vec{r}, t) + c.c. \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned}
\vec{P}_j^{(3)}(\vec{r}, t) = & \frac{\epsilon_0}{4} \vec{E}_j(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(t-t') \left( |\vec{E}_j(\vec{r}, t')|^2 + |\vec{E}_k(\vec{r}, t')|^2 \right) dt' \\
& + \frac{\epsilon_0}{8} \vec{E}_j^*(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(t-t') \vec{E}_j(\vec{r}, t') \vec{E}_j(\vec{r}, t') dt' \\
& + \frac{\epsilon_0}{4} \vec{E}_k(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(t-t') \vec{E}_j(\vec{r}, t') \vec{E}_k^*(\vec{r}, t') dt' \\
& + \frac{\epsilon_0}{4} \vec{E}_k^*(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(t-t') \vec{E}_j(\vec{r}, t') \vec{E}_k(\vec{r}, t') dt' \quad (B.17)
\end{aligned}$$

où  $j, k = p, s$  ou  $s, p$ . Cette notation indique qu'il y a deux équations :  $j = p$  avec  $k = s$  et  $j = s$  avec  $k = p$ .

**Approximation 6** Dans l'équation (B.17), nous avons négligé tous les termes qui sont en désaccord de phase. L'accord de phase n'est pas présent de façon générale car il faut avoir conservation des fréquences et des nombres d'onde, ce que la dispersion du verre ne permet qu'à des fréquences spécifiques. Les seuls termes restant sont donc les termes en  $E_j \cdot E_j \cdot E_j^*$  ou  $E_j \cdot E_k \cdot E_k^*$  qui oscillent autour de  $\omega_j$ .

Nous avons maintenant des expressions des polarisations plus simples. La seule inconnue qui reste est la susceptibilité non-linéaire.

### B.2.1 Différentes contributions au coefficient $\chi^{(3)}$

La susceptibilité non-linéaire se sépare en deux contributions : électronique et moléculaire. Il est possible de séparer la contribution moléculaire en deux effets : l'effet Brillouin et l'effet Raman.

**Hypothèse 3** La polarisation d'ordre 3 peut être décomposée en trois contributions : la contribution électronique  $\chi_{elec}^{(3)}$ , la contribution Raman  $\chi_R^{(3)}$  et la contribution Brillouin  $\chi_B^{(3)}$ .

### B.2.1.1 Contribution de l'effet Brillouin

La contribution Brillouin stimulée est l'interaction entre un photon et un phonon acoustique. Le champ incident génère une onde acoustique par électrostriction qui module l'indice de réfraction, ce qui crée un réseau de Bragg. Le champ optique est alors diffracté et réfléchi par le réseau mais subit un décalage en fréquence par effet Doppler puisque le réseau se déplace [Agrawal 2001]. Il existe également de l'effet Brillouin spontané où le champ optique est diffracté (mais non réfléchi) par les ondes acoustiques qui sont guidées par la fibre [Shelby, Levenson & Bayer 1985]. Le décalage en fréquence est de l'ordre de 10 GHz pour l'effet Brillouin dans le cas stimulé et entre 10 MHz et 1000 MHz dans le cas spontané.

**Approximation 7** *Nous négligeons l'effet Brillouin puisque la largeur spectrale des sources considérées est typiquement plus grande que la largeur du gain Brillouin.*

Il s'ensuit que :

$$\chi^{(3)}(t) = \chi_{elec}^{(3)}(t) + \chi_R^{(3)}(t) \quad (\text{B.18})$$

et

$$\vec{P}_j^{(3)}(t) = \vec{P}_j^{(3),elec}(t) + \vec{P}_j^{(3),R}(t). \quad (\text{B.19})$$

### B.2.1.2 Contribution de l'effet Raman

La contribution Raman provient de l'interaction d'un photon incident avec un phonon optique, c'est-à-dire que le photon incident est diffusé par un atome mais une partie de son énergie est convertie en mode vibrationnel ; le photon réémis a donc une énergie plus faible. L'onde ainsi créée est appelée onde de Stokes. Le processus inverse peut également se produire où l'énergie vibrationnelle est transférée au photon ; il s'agit alors d'une onde anti-Stokes. Dans la silice, la courbe de gain Raman est donnée à la figure (B.1) dans le domaine des fréquences et à la figure (B.2) dans le domaine du temps. Le temps de réponse de la courbe de gain Raman est de



quelques centaines de femtosecondes. Nous posons ainsi :

$$\chi_R^{(3)}(t) = \chi_R h_R(t) = \chi_R [h'_R(t) + i h''_R(t)] \quad \text{où} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t) dt = 1 \quad (\text{B.20})$$

où  $h_R(t)$  est la réponse normalisée de la susceptibilité. La polarisation Raman s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \vec{P}_j^{(3),R}(z, t) = \frac{\epsilon_0 \chi_R}{4} & \left[ \vec{E}_j(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') \left( |\vec{E}_j(\vec{r}, t')|^2 + |\vec{E}_k(\vec{r}, t')|^2 \right) dt' \right. \\ & + \frac{1}{2} \vec{E}_j^*(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') \vec{E}_j(\vec{r}, t') \vec{E}_j(\vec{r}, t') dt' \\ & + \vec{E}_k(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') \vec{E}_j(\vec{r}, t') \vec{E}_k^*(\vec{r}, t') dt' \\ & \left. + \vec{E}_k^*(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') \vec{E}_j(\vec{r}, t') \vec{E}_k(\vec{r}, t') dt' \right] \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

**Approximation 8** Les deuxième et dernier termes de (B.21) sont la convolution de termes oscillant très rapidement (les termes proportionnels à  $\vec{E}_j \vec{E}_j$  et  $\vec{E}_j \vec{E}_k$  oscillent respectivement à  $2\omega_j$  et  $\omega_j + \omega_k$ ) avec un terme plus lent ( $h_R(t)$ ) et sont donc presque nul. Nous pouvons les négliger, contrairement à ce qui arrive dans le cas de la polarisation électronique à cause de son caractère instantané.

La polarisation Raman devient par conséquent :

$$\begin{aligned} \vec{P}_j^{(3),R}(z, t) = \chi_R & \left[ \frac{\epsilon_0}{4} \vec{E}_j(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') \left( |\vec{E}_j(\vec{r}, t')|^2 + |\vec{E}_k(\vec{r}, t')|^2 \right) dt' \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon_0}{4} \vec{E}_k(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') \vec{E}_j(\vec{r}, t') \vec{E}_k^*(\vec{r}, t') dt' \right]. \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

### B.2.1.3 Contribution électronique

**Hypothèse 4** Dans la silice, le temps de réponse de la susceptibilité électronique est d'environ 1 femtoseconde, ce qui est presque instantané pour des impulsions d'une

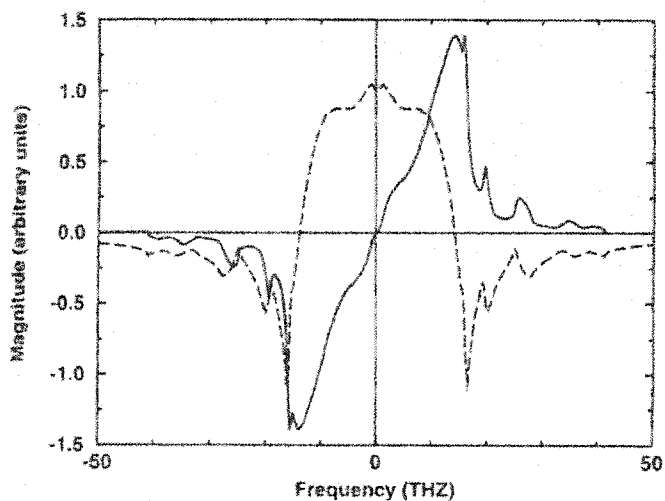


Figure B.1 : Réponse spectrale normalisée de la susceptibilité Raman dans la silice ; la courbe pointillée est la partie réelle de  $\tilde{h}_R(\omega)$  et représente le changement d'indice dû à la diffusion Raman stimulée. Les deux courbes sont reliées par les relations de Kramers-Krönig. La courbe pleine est la partie imaginaire de  $\tilde{h}_R(\omega)$ . C'est, à un facteur de proportionnalité près, le gain Raman. Tiré de [Headley & Agrawal 1996]

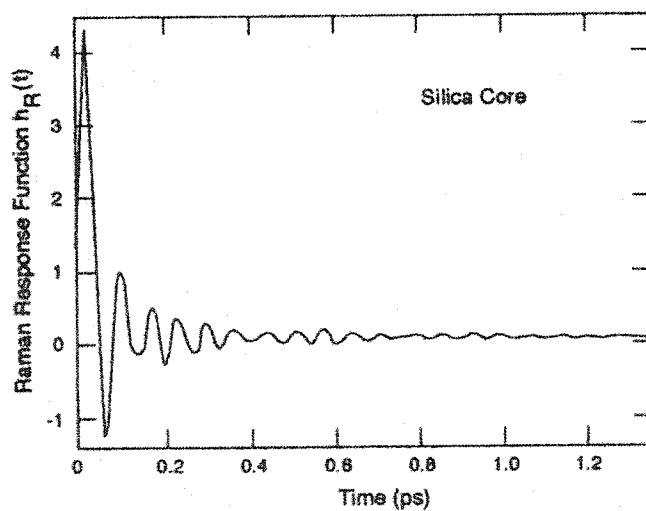


Figure B.2 : Réponse temporelle normalisée de la susceptibilité Raman ; c'est la transformée de Fourier de la réponse spectrale normalisée. Tiré de [Agrawal 2001]

durée supérieure à 10 femtosecondes. Nous posons donc :

$$\chi_{elec}^{(3)}(t) = (\chi'_{elec} + i\chi''_{elec})\delta(t) \quad (\text{B.23})$$

avec  $\chi'_{elec}$  et  $\chi''_{elec}$  réels. La polarisation électronique devient ainsi avec (B.17) :

$$\vec{P}_j^{(3),elec}(z, t) = \frac{3\epsilon_0}{8}(\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) \left[ |\vec{E}_j(\vec{r}, t)|^2 + 2|\vec{E}_k(\vec{r}, t)|^2 \right] \vec{E}_j(\vec{r}, t) \quad (\text{B.24})$$

## B.2.2 Polarisations dans le domaine spectral

Il nous faut maintenant résoudre l'équation d'onde avec les polarisations non-linéaires. Pour ce faire, il est plus aisé de travailler à partir de ce point dans le domaine spectral. Appliquons la transformée de Fourier aux équations (B.9) et (B.15)-(B.17). (Les définitions des transformées de Fourier sont données à l'annexe A ;  $\tilde{G}$  représente la transformée de Fourier de  $G$ .)

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -\mu_0 \omega^2 \left[ \vec{P}^{(L)}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}^{(3)}(\vec{r}, \omega) \right] \quad (\text{B.25})$$

$$\vec{P}^{(L)}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (\text{B.26})$$

$$\vec{P}^{(3)}(\vec{r}, \omega) = \vec{P}_p^{(3),elec}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}_s^{(3),elec}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}_p^{(3),R}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}_s^{(3),R}(\vec{r}, \omega) + c.c. \quad (\text{B.27})$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
\vec{P}_j^{(3),elec}(\vec{r}, \omega) &= \frac{3\epsilon_0}{8} (\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) \left[ \vec{E}_j(\vec{r}, \omega) * \vec{E}_j^*(\vec{r}, -\omega) \right. \\
&\quad \left. + 2\vec{E}_k(\vec{r}, \omega) * \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega) \right] * \vec{E}_j(\vec{r}, \omega) \\
&= \frac{3\epsilon_0}{8} (\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \vec{E}_j(\vec{r}, \omega - \omega_1) \vec{E}_j^*(\vec{r}, -\omega_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\vec{E}_k(\vec{r}, \omega - \omega_1) \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega_1) \right] * \vec{E}_j(\vec{r}, \omega) d\omega_1 \right\} \\
&= \frac{3\epsilon_0}{8} (\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_j(\vec{r}, \omega - \omega') \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \vec{E}_j(\vec{r}, \omega' - \omega_1) \vec{E}_j^*(\vec{r}, -\omega_1) \right. \\
&\quad \left. + 2\vec{E}_k(\vec{r}, \omega' - \omega_1) \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega_1) \right] d\omega_1 d\omega'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{P}_j^{(3),R}(\vec{r}, \omega) &= \frac{\epsilon_0 \chi_R}{4} \vec{E}_j(\vec{r}, \omega) * \left\{ \tilde{h}_R(\omega) \cdot \left[ \vec{E}_j(\vec{r}, \omega) * \vec{E}_j^*(\vec{r}, -\omega) + \vec{E}_k(\vec{r}, \omega) * \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{\epsilon_0 \chi_R}{4} \vec{E}_k(\vec{r}, \omega) * \left\{ \tilde{h}_R(\omega) \cdot \left[ \vec{E}_j(\vec{r}, \omega) * \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega) \right] \right\} \\
&= \frac{\epsilon_0 \chi_R}{4} \vec{E}_j(\vec{r}, \omega) * \left\{ \tilde{h}_R(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \vec{E}_j(\vec{r}, \omega - \omega_1) \vec{E}_j^*(\vec{r}, -\omega_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \vec{E}_k(\vec{r}, \omega - \omega_1) \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega_1) \right] d\omega_1 \right\} \\
&\quad + \frac{\epsilon_0 \chi_R}{4} \vec{E}_k(\vec{r}, \omega) * \left\{ \tilde{h}_R(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_j(\vec{r}, \omega - \omega_1) \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega_1) d\omega_1 \right\} \\
&= \frac{\epsilon_0 \chi_R}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_j(\vec{r}, \omega - \omega') \tilde{h}_R(\omega') \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \vec{E}_j(\vec{r}, \omega' - \omega_1) \vec{E}_j^*(\vec{r}, -\omega_1) \right. \\
&\quad \left. + \vec{E}_k(\vec{r}, \omega' - \omega_1) \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega_1) \right] d\omega_1 d\omega' \\
&\quad + \frac{\epsilon_0 \chi_R}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_k(\vec{r}, \omega - \omega') \tilde{h}_R(\omega') \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_j(\vec{r}, \omega' - \omega_1) \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega_1) d\omega_1 d\omega'
\end{aligned}$$

Avec  $\omega' = \omega_1 + \omega_2$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\vec{P}_j^{(3),elec}(\vec{r}, \omega) &= \frac{3\epsilon_0}{8} (\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_j(\vec{r}, \omega - \omega_1 - \omega_2) \left[ \vec{E}_j(\vec{r}, \omega_2) \vec{E}_j^*(\vec{r}, -\omega_1) \right. \\
&\quad \left. + 2\vec{E}_k(\vec{r}, \omega_2) \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega_1) \right] d\omega_1 d\omega_2
\end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}
\vec{P}_j^{(3),R}(\vec{r}, \omega) &= \frac{\epsilon_0 \chi_R}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_j(\vec{r}, \omega - \omega_1 - \omega_2) \tilde{h}_R(\omega_1 + \omega_2) \left[ \vec{E}_j(\vec{r}, \omega_2) \vec{E}_j^*(\vec{r}, -\omega_1) \right. \\
&\quad \left. + \vec{E}_k(\vec{r}, \omega_2) \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega_1) \right] \\
&\quad + \vec{E}_k(\vec{r}, \omega - \omega_1 - \omega_2) \tilde{h}_R(\omega_1 + \omega_2) \vec{E}_j(\vec{r}, \omega_2) \vec{E}_k^*(\vec{r}, -\omega_1) d\omega_1 d\omega_2 \quad (\text{B.29})
\end{aligned}$$

où  $j, k = p, s$  ou  $s, p$ . Nous pouvons regrouper les parties linéaires ; l'équation (B.25) devient :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}^{(3)}(\vec{r}, \omega) \quad (\text{B.30})$$

où  $\epsilon(\omega)$  est la permittivité relative du milieu qui s'écrit encore :

$$\epsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)} = \left[ n(\omega) + i \frac{\alpha(\omega)c}{2\omega} \right]^2 \approx n^2(\omega) + i \frac{n(\omega)\alpha(\omega)c}{\omega} \quad (\text{B.31})$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'absorption de l'amplitude des ondes et où l'approximation est valable si  $\alpha$  est petit devant  $\frac{n\omega}{c}$ .

## B.3 Équations de propagation générales

Puisque nous avons maintenant une expression (relativement) simple de l'équation, nous pouvons en déduire l'équation de propagation en  $z$  des champs, ce que nous faisons dans cette section. Pour commencer, nous posons une forme du champ électrique qui nous permet de séparer les parties longitudinale et transverse.

### B.3.1 Champ électrique

Les approximations 1 et 3 nous contraignent à traiter les modes de la fibre scalairement. Nous retrouvons ainsi les modes scalaires transverses de la fibre qui sont polarisés linéairement. Nous considérons que le champ électrique est polarisé linéairement en  $\vec{x}$ .

**Approximation 9** Nous pouvons séparer le champ électrique (transverse dans l'appro-

imation scalaire) en une enveloppe longitudinal qui dépend du temps et une distribution transverse. La distribution transverse est donnée par les modes scalaires de la fibre.

**Approximation 10** Nous supposons que le mode transverse ne dépend que de la fréquence centrale (porteuse)  $\omega_p$  ou  $\omega_s$  et non du spectre. Cela revient à considérer que le mode transverse est monochromatique, ce qui est généralement vrai car il varie peu avec la fréquence.

Le champ s'écrit alors :

$$\vec{E}_j(\vec{r}, t) = \vec{x} \Psi_j(x, y) A_j(z, t) e^{i\beta_j(\omega)z} \quad (\text{B.32})$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{x}}{2} [\Psi_p(x, y) A_p(z, t) e^{i\beta_p(\omega)z} + \Psi_s(x, y) A_s(z, t) e^{i\beta_s(\omega)z} + c.c.] \quad (\text{B.33})$$

où

$$\beta(\omega)_j = \frac{n_{\text{eff},j}(\omega)\omega}{c} \quad (\text{B.34})$$

$\Psi_j(x, y)$  est le mode transverse  $j$  tandis que  $n_{\text{eff}}$  est son indice effectif. Notons que nous n'avons pas modulé le champ autour de la porteuse ; cette omission va simplifier les calculs qui vont suivre. Il est facile d'avoir le champ dans le domaine spectral en prenant la transformée de Fourier de (B.32).

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{\vec{x}}{2} \left( \Psi_p(x, y) \hat{A}_p(z, \omega) e^{i\beta_p(\omega)z} + \Psi_s(x, y) \hat{A}_s(z, \omega) e^{i\beta_s(\omega)z} \right) + c.c. \quad (\text{B.35})$$

### B.3.2 Élimination de la partie transverse

Nous avons maintenant une expression du champ électrique (B.35) que nous remplaçons dans l'équation d'onde (B.30). En utilisant les expressions des polarisations

non-linéaires (B.27) ou (B.28)-(B.29), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \frac{\vec{x}}{2} \left\{ \tilde{A}_p(z, \omega) e^{i\beta_p(\omega)z} \left[ \vec{\nabla}_T^2 \Psi_p(x, y) + \frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{c^2} \Psi_p(x, y) \right] \right. \\
& \quad + \tilde{A}_s(z, \omega) e^{i\beta_s(\omega)z} \left[ \vec{\nabla}_T^2 \Psi_s(x, y) + \frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{c^2} \Psi_s(x, y) \right] \\
& \quad \left. + \Psi_p(x, y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ \tilde{A}_p(z, \omega) e^{i\beta_p(\omega)z} \right] + \Psi_s(x, y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ \tilde{A}_s(z, \omega) e^{i\beta_s(\omega)z} \right] \right\} + c.c. \\
& = -\mu_0 \omega^2 \left[ \vec{P}_p^{(3),elec}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}_s^{(3),elec}(\vec{r}, \omega) \vec{P}_p^{(3),R}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}_s^{(3),R}(\vec{r}, \omega) \right] + c.c. \quad (B.36)
\end{aligned}$$

**Approximation 11** *En considérant que les spectres centrés autour de  $\pm\omega_p$  et  $\pm\omega_s$  sont suffisamment étroits pour qu'ils ne se recouvrent pas, il est possible de séparer l'équation selon les contributions à ces fréquences. Ainsi, en séparant et en explicitant la dérivée seconde par rapport à  $z$ , nous obtenons quatre équations dont deux peuvent être ignorées puisqu'elles sont les complexes conjugués des deux autres.*

Nous avons ainsi une équation d'onde pour la pompe et une pour l'onde de Stokes.

$$\begin{aligned}
& \frac{\vec{x}}{2} \left\{ \tilde{A}_p(z, \omega) e^{i\beta_p(\omega)z} \left[ \vec{\nabla}_T^2 \Psi_p(x, y) + \left( \frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{c^2} - \beta_p^2(\omega) \right) \Psi_p(x, y) \right] \right. \\
& \quad \left. + \Psi_p(x, y) e^{i\beta_p(\omega)z} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{A}_p(z, \omega) + 2i\beta_p(\omega) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_p(z, \omega) \right] \right\} \\
& = -\mu_0 \omega^2 \left[ \vec{P}_p^{(3),elec}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}_p^{(3),R}(\vec{r}, \omega) \right] \quad (B.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\vec{x}}{2} \left\{ \tilde{A}_s(z, \omega) e^{i\beta_s(\omega)z} \left[ \vec{\nabla}_T^2 \Psi_s(x, y) + \left( \frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{c^2} - \beta_s^2(\omega) \right) \Psi_s(x, y) \right] \right. \\
& \quad \left. + \Psi_s(x, y) e^{i\beta_s(\omega)z} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{A}_s(z, \omega) + 2i\beta_s(\omega) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_s(z, \omega) \right] \right\} \\
& = -\mu_0 \omega^2 \left[ \vec{P}_s^{(3),elec}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}_s^{(3),R}(\vec{r}, \omega) \right] \quad (B.38)
\end{aligned}$$

**Hypothèse 5** Dans la silice, les effets non-linéaires sont beaucoup plus faibles que les effets linéaires. L'indice non-linéaire de la fibre (que nous définissons plus tard à la page 102) vaut  $n_2 = 2,6 \cdot 10^{-20} \text{ W/m}^2$ . Cette indice donne l'équivalent de la contribution des polarisations non-linéaires à l'indice de réfraction.

**Approximation 12** Nous posons que les champs transverses  $\Psi_j$  ne dépendent pas de la puissance. Pour le champ de claquage de la silice de  $\mathcal{E}_c = 10^9 \text{ V/m}$ , la fraction non-linéaire de l'indice de réfraction est [Agrawal 2001]:

$$\Delta n = n_2 \frac{\epsilon_0 c n}{2} |\mathcal{E}_c|^2 = 2,6 \cdot 10^{-26} \cdot 1,926 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{18} \approx 5 \cdot 10^{-5} \quad (\text{B.39})$$

Ce changement d'indice est trop faible pour changer la forme du mode transverse; son seul effet est une perturbation de la constante de propagation donnée par les polarisations non-linéaires.

Nous résolvons donc la partie transverse linéairement de sorte que  $\Psi_j$  obéit à [Bures 2001]:

$$\vec{\nabla}_T^2 \Psi_j(x, y) + \left[ \frac{n(\omega)\omega^2}{c^2} - \beta_j^2(\omega) \right] \Psi_j(x, y) = 0 \quad (\text{B.40})$$

ce qui simplifie les équations (B.37) et (B.38).

**Approximation 13** Nous considérons maintenant que l'enveloppe spectrale se modifie lentement, c'est-à-dire peu pendant une période optique. C'est l'approximation de l'enveloppe lente qui permet de négliger la dérivée seconde en  $z$  dans (B.37) et (B.38). Cette approximation est valable pour des impulsions aussi courtes que 10 femtosecondes.

En effectuant les deux dernières approximations et en utilisant (B.31), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\vec{x}}{2} \Psi_p(x, y) e^{i\beta_p(\omega)z} \left[ 2i\beta_p(\omega) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_p(z, \omega) + \frac{in(\omega)\alpha(\omega)c}{\omega} \tilde{A}_p(z, \omega) \right] \\ & = -\mu_0\omega^2 \left[ \tilde{P}_p^{(3),elec}(\vec{r}, \omega) + \tilde{P}_p^{(3),R}(\vec{r}, \omega) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$



$$\begin{aligned}
& \frac{\vec{x}}{2} \Psi_s(x, y) e^{i\beta_s(\omega)z} \left[ 2i\beta_s(\omega) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_s(z, \omega) + \frac{in(\omega)\alpha(\omega)c}{\omega} \tilde{A}_p(z, \omega) \right] \\
& = -\mu_0\omega^2 \left[ \vec{P}_s^{(3),elec}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}_s^{(3),R}(\vec{r}, \omega) \right].
\end{aligned} \tag{B.42}$$

Explicitons le membre de droite des équations (B.41) et (B.42), c'est-à-dire les polarisations non-linéaires, en utilisant (B.28)-(B.29) et (B.35) et en n'explicitant pas la dépendance en  $(x, y)$  pour plus de clarté.

$$\begin{aligned}
\vec{P}_j^{(3),elec}(\vec{r}, \omega) &= \vec{x} \frac{3\epsilon_0}{8} (\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_j \tilde{A}_j(z, \omega - \omega_1 - \omega_2) e^{i\beta_j(\omega - \omega_1 - \omega_2)z} \\
&\quad \cdot \left[ |\Psi_j|^2 \tilde{A}_j(z, \omega_2) \tilde{A}_j^*(z, -\omega_1) e^{i\beta_j(\omega_2)z} e^{-i\beta_j(-\omega_1)z} \right. \\
&\quad \left. + 2|\Psi_k|^2 \tilde{A}_k(z, \omega_2) \tilde{A}_k^*(z, -\omega_1) e^{i\beta_k(\omega_2)z} e^{-i\beta_k(-\omega_1)z} \right] d\omega_1 d\omega_2
\end{aligned} \tag{B.43}$$

$$\begin{aligned}
\vec{P}_j^{(3),R}(\vec{r}, \omega) &= \vec{x} \frac{\epsilon_0 \chi_R}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_R(\omega_1 + \omega_2) \left\{ \Psi_j \tilde{A}_j(z, \omega - \omega_1 - \omega_2) e^{i\beta_j(\omega - \omega_1 - \omega_2)z} \right. \\
&\quad \cdot \left[ |\Psi_j|^2 \tilde{A}_j(z, \omega_2) \tilde{A}_j^*(z, -\omega_1) e^{i\beta_j(\omega_2)z} e^{-i\beta_j(-\omega_1)z} \right. \\
&\quad \left. + |\Psi_k|^2 \tilde{A}_k(z, \omega_2) \tilde{A}_k^*(z, -\omega_1) e^{i\beta_k(\omega_2)z} e^{-i\beta_k(-\omega_1)z} \right] \\
&\quad \left. + \Psi_j |\Psi_k|^2 \tilde{A}_k(z, \omega - \omega_1 - \omega_2) \tilde{A}_j(z, \omega_2) \tilde{A}_k^*(z, -\omega_1) e^{i\beta_k(\omega - \omega_1 - \omega_2)z} \right. \\
&\quad \left. \cdot e^{i\beta_j(\omega_2)z} e^{-i\beta_k(-\omega_1)z} \right\} d\omega_1 d\omega_2
\end{aligned} \tag{B.44}$$

**Approximation 14** *Nous nous affranchissons de la dépendance en  $x$  et  $y$  en moyennant sur la section droite de la fibre. Pour ce faire, remplaçons (B.43) et (B.44) dans (B.41) et (B.42) et multiplions de chaque côté par  $\Psi_j^*(x, y)$  et intégrons sur la section de la fibre. En ne travaillant que sur l'enveloppe et en n'explicitant pas l'orientation  $\vec{x}$ , nous obtenons :*

$$\left[ 2i\beta_j(\omega) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_j(z, \omega) + \frac{in(\omega)\alpha(\omega)c}{\omega} \tilde{A}_j(z, \omega) \right] e^{i\beta_j(\omega)z} = -\frac{\omega^2}{2c^2} \left[ \tilde{\tilde{P}}_j^{(3),elec}(z, \omega) + \tilde{\tilde{P}}_j^{(3),R}(z, \omega) \right] \quad (\text{B.45})$$

avec  $j = p$  ou  $s$  et avec

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{P}}_j^{(3),elec}(z, \omega) = & \frac{3}{2} (\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_j(z, \omega - \omega_1 - \omega_2) e^{i\beta_j(\omega - \omega_1 - \omega_2)z} \\ & \cdot \left[ f_{jj} \tilde{A}_j(z, \omega_2) \tilde{A}_j^*(z, -\omega_1) e^{i\beta_j(\omega_2)z} e^{-i\beta_j(-\omega_1)z} \right. \\ & \left. + 2f_{jk} \tilde{A}_k(z, \omega_2) \tilde{A}_k^*(z, -\omega_1) e^{i\beta_k(\omega_2)z} e^{-i\beta_k(-\omega_1)z} \right] d\omega_1 d\omega_2 \quad (\text{B.46}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{P}}_j^{(3),R}(z, \omega) = & \chi_R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_j(z, \omega - \omega_1 - \omega_2) e^{i\beta_j(\omega - \omega_1 - \omega_2)z} \tilde{h}_R(\omega_1 + \omega_2) \\ & \cdot \left[ f_{jj} \tilde{A}_j(z, \omega_2) \tilde{A}_j^*(z, -\omega_1) e^{i\beta_j(\omega_2)z} e^{-i\beta_j(-\omega_1)z} \right. \\ & \left. + f_{jk} \tilde{A}_k(z, \omega_2) \tilde{A}_k^*(z, -\omega_1) e^{i\beta_k(\omega_2)z} e^{-i\beta_k(-\omega_1)z} \right] \\ & + f_{jk} \tilde{A}_k(z, \omega - \omega_1 - \omega_2) \tilde{A}_j(z, \omega_2) \tilde{A}_k^*(z, -\omega_1) \\ & \cdot \tilde{h}_R(\omega_1 + \omega_2) e^{i\beta_k(\omega - \omega_1 - \omega_2)z} e^{i\beta_j(\omega_2)z} e^{-i\beta_k(-\omega_1)z} d\omega_1 d\omega_2 \quad (\text{B.47}) \end{aligned}$$

où

$$f_{jk} = \frac{\int_{A_\infty} |\psi_j|^2 |\psi_k|^2 dA}{\int_{A_\infty} |\psi_j|^2 dA} \quad (\text{B.48})$$

Les quantités barrées représentent des valeurs moyennes sur la section droite de la fibre. La dépendance transverse du champ est maintenant réduite aux valeurs des quantités  $f_{jk}$ .

### B.3.3 Normalisation en puissance

Nous avons travaillé depuis le début avec les amplitudes des champs électriques de sorte que  $|A|^2$  soit en V/m. Il est cependant plus pertinent d'avoir la norme en

watts, puisque c'est ce que la quantité qu'on mesure. Commençons par diviser (B.45) par  $2i\beta_j(\omega)$  et remplaçons  $\beta_j$  expression (B.34). Avec l'approximation suivante (15), l'équation (B.45) devient :

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_j(z, \omega) + \frac{\alpha(\omega)}{2} \tilde{A}_j(z, \omega) \right) e^{i\beta_j(\omega)z} = \frac{i\omega}{4n_{\text{eff},j}(\omega)c} \left[ \tilde{P}_j^{(3),\text{elec}}(z, \omega) + \tilde{P}_j^{(3),R}(z, \omega) \right]. \quad (\text{B.49})$$

**Approximation 15** *L'indice effectif du mode est presque celui de la silice, ainsi  $n(\omega)/n_{\text{eff}} \approx 1$ .*

Nous avons maintenant les équations de propagation non-linéaires en fréquence où  $A_j$  est l'amplitude du champ électrique. Effectuons maintenant le changement variable (B.50) dans (B.49), qui correspond à une modulation dans le temps autour de  $\omega_j$  et qui normalise les impulsions de sorte que  $|U_j|^2$  soit une puissance en watts. La modulation nous permet de centrer le spectre de l'impulsion autour de la fréquence porteuse  $\omega_j$ .

$$\tilde{A}_j(z, \omega) = \frac{\tilde{U}_j(z, \omega - \omega_j)}{\sqrt{\int_{A_\infty} |\psi_j|^2 dA}} e^{-i[\beta_j(\omega) - \beta_j(\omega_j)]z} \quad (\text{B.50})$$

L'équation devient (B.49) ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \tilde{U}_j(z, \omega - \omega_j) - i[\beta_j(\omega) - \beta_j(\omega_j)] \tilde{U}_j(z, \omega - \omega_j) + \frac{\alpha(\omega - \omega_j + \omega_j)}{2} \tilde{U}_j(z, \omega - \omega_j) \\ &= \frac{i(\omega - \omega_j + \omega_j)}{4n_{\text{eff},j}(\omega - \omega_j + \omega_j)c} \left[ \tilde{P}_j^{(3),\text{elec}}(z, \omega) + \tilde{P}_j^{(3),R}(z, \omega) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

avec les polarisations moyennes (B.46) et (B.47) redéfinies par :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_j^{(3),elec}(z, \omega) = & \frac{3}{2}(\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_j(z, \omega - \omega_j - \omega_1 - \omega_2) \\ & \cdot \left[ \frac{\tilde{U}_j(z, \omega_2 - \omega_j) \tilde{U}_j^*(z, -(\omega_1 - \omega_j))}{A_{eff,jj}} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\tilde{U}_k(z, \omega_2 - \omega_k) \tilde{U}_k^*(z, -(\omega_1 - \omega_k))}{A_{eff,jk}} \right] d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (B.52)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_j^{(3),R}(z, \omega) = & \chi_R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_R(\omega_1 + \omega_2) \left\{ \tilde{U}_j(z, \omega - \omega_j - \omega_1 - \omega_2) \right. \\ & \cdot \left[ \frac{\tilde{U}_j(z, \omega_2 - \omega_j) \tilde{U}_j^*(z, -(\omega_1 - \omega_j))}{A_{eff,jj}} + \frac{\tilde{U}_k(z, \omega_2 - \omega_k) \tilde{U}_k^*(z, -(\omega_1 - \omega_k))}{A_{eff,jk}} \right] \\ & \left. + \tilde{U}_k(z, \omega - \omega_k - \omega_1 - \omega_2) \frac{\tilde{U}_j(z, \omega_2 - \omega_j) \tilde{U}_k^*(z, -(\omega_1 - \omega_k))}{A_{eff,jk}} \right\} d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (B.53)$$

où

$$A_{eff,jk} = \frac{\int_{A_\infty} |\psi_j|^2 dA \int_{A_\infty} |\psi_k|^2 dA}{\int_{A_\infty} |\psi_j|^2 |\psi_k|^2 dA} \quad (B.54)$$

est l'aire effective du mode qui caractérise le confinement du champ dans la fibre.

### B.3.4 Équation de propagation dans le domaine du temps

Ramenons l'équation dans le temps. Pour ce faire, il faut connaître la transformée de Fourier de  $\beta_j$ , ce qui n'est pas simple. Il est toutefois facile de connaître la valeur de  $\beta(\omega)$  autour de la fréquence porteuse.

**Approximation 16** *Faisons le développement limité à l'ordre  $m$  de  $\beta_j(\omega)$  autour de  $\omega_j$ .*

$$\beta_j(\omega) \approx \beta_j(\omega_j) + \beta_{1j} \Delta\omega_j + \frac{\beta_{2j}}{2} \Delta\omega_j^2 + \frac{\beta_{3j}}{6} \Delta\omega_j^3 + \dots + \frac{\beta_{mj}}{m!} \Delta\omega_j^m \quad (B.55)$$

où  $\beta_{mj} = \frac{d^m \beta_j}{d\omega^m}(\omega_j)$ . En substituant dans (B.51), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \tilde{U}_j(z, \Delta\omega_j) - i \left( \beta_{1j} \Delta\omega_j + \frac{\beta_{2j}}{2} \Delta\omega_j^2 + \frac{\beta_{3j}}{6} \Delta\omega_j^3 + \dots + \frac{\beta_{mj}}{m!} \Delta\omega_j^m \right) \tilde{U}_j(z, \Delta\omega_j) \\ & + \frac{\alpha(\Delta\omega_j + \omega_j)}{2} \tilde{U}_j(z, \Delta\omega_j) = i \frac{(\Delta\omega_j + \omega_j)}{4n_{\text{eff},j}(\Delta\omega_j + \omega_j)c} \tilde{P}_3^{(j)}(z, \omega) \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

avec les polarisations écrites symboliquement :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_j^{(3),\text{elec}}(z, \omega) &= \frac{3}{2} (\chi'_{\text{elec}} + i\chi''_{\text{elec}}) \tilde{U}_j(z, \Delta\omega_j) \\ & * \left[ \frac{\tilde{U}_j(z, \Delta\omega_j) * \tilde{U}_j^*(z, -\Delta\omega_j)}{A_{\text{eff},jj}} + 2 \frac{\tilde{U}_k(z, \Delta\omega_k) * \tilde{U}_k^*(z, -\Delta\omega_k)}{A_{\text{eff},jk}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_j^{(3),R}(z, \omega) &= \chi_R \tilde{U}_j(z, \Delta\omega_j) * \left\{ \tilde{h}_R(\Delta\omega_j) \right. \\ & \cdot \left[ \frac{\tilde{U}_j(z, \Delta\omega_j) * \tilde{U}_j^*(z, -\Delta\omega_j)}{A_{\text{eff},jj}} + \frac{\tilde{U}_k(z, \Delta\omega_k) * \tilde{U}_k^*(z, -\Delta\omega_k)}{A_{\text{eff},jk}} \right] \left. \right\} \\ & + \chi_R \tilde{U}_k(z, \Delta\omega_k) * \left[ \tilde{h}_R(\Delta\omega_j) \cdot \frac{\tilde{U}_j(z, \Delta\omega_j) * \tilde{U}_k^*(z, -\Delta\omega_k)}{A_{\text{eff},jk}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

où  $\Delta\omega_j = \omega - \omega_j$ . Le seul détail qui nous reste à régler est l'absorption.

**Approximation 17** Nous supposons que l'absorption ainsi que l'indice effectif du membre de droite de (B.56) ne dépendent que de la fréquence porteuse ; posons alors  $n_{\text{eff},j}(\Delta\omega_j + \omega_j) \approx n_{\text{eff},j}(\omega_j) = n_{\text{eff},j}$  et  $\alpha(\Delta\omega_j + \omega_j) \approx \alpha(\omega_j) = \alpha_j$ .

Nous repassons maintenant dans le domaine temporel en faisant la transformée de Fourier inverse de (B.56) par rapport à  $\Delta\omega_j$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} U_j(z, t) + \beta_{1j} \frac{\partial}{\partial t} U_j(z, t) + \frac{i\beta_{2j}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_j(z, t) - \frac{\beta_{3j}}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} U_j(z, t) + \dots \\ & - i^{m+1} \frac{\beta_{mj}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial t^m} U_j(z, t) + \frac{\alpha_j}{2} U_j(z, t) \\ & = \frac{i\omega_j}{4n_{\text{eff},j}c} \left( 1 + \frac{i}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \bar{P}_j^{(3),\text{elec}}(z, t) + \bar{P}_j^{(3),R}(z, t) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

avec les transformées de Fourier de (B.57) et (B.58) données par :

$$\begin{aligned}\bar{P}_j^{(3),elec}(z, t) &= \frac{3}{2}(\chi'_{elec} + i\chi''_{elec})U_j(z, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{|U_j(z, t')|^2}{A_{eff,jj}} + 2\frac{|U_k(z, t')|^2}{A_{eff,jk}} \right] dt' \\ &= \frac{3}{2}(\chi'_{elec} + i\chi''_{elec})F_j^{elec}(z, t)\end{aligned}\quad (B.60)$$

$$\begin{aligned}\bar{P}_j^{(3),R}(z, t) &= \chi_R U_j(z, t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') \left[ \frac{|U_j(z, t')|^2}{A_{eff,jj}} + \frac{|U_k(z, t')|^2}{A_{eff,jk}} \right] dt' \\ &\quad + U_k(z, t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') \frac{U_j(z, t')U_k^*(z, t')}{A_{eff,jk}} e^{-i(\omega_j - \omega_k)(t - t')} dt' \\ &= \chi_R F_j^R(z, t)\end{aligned}\quad (B.61)$$

Les exponentielles complexes (représentant la modulation dans le temps des amplitudes) dans (B.61) proviennent de la convolution avec des pics de Dirac. Ils apparaissent comme des décalages dans le domaine des fréquences dans les équations (B.57) et (B.58). L'équation (B.59) s'applique pour la propagation d'impulsions d'une durée aussi courte que 10 femtosecondes, qui est la limite de l'approximation de l'enveloppe lente (Approximation 13).

## B.4 Équations de propagation femtoseconde

Nous avons maintenant les équations de propagation pour des impulsions d'une durée supérieure à 10 femtosecondes. Simplifions maintenant ces équations pour des impulsions d'une durée de quelques dizaines de femtosecondes.

**Approximation 18** *Pour des impulsions plus longues que 100 femtosecondes, nous limitons la dispersion à l'ordre 3, les ordres supérieurs étant négligeables à cause de la durée des impulsions.*

Soient les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} f_R = \left(1 + \frac{3\chi'_{elec}}{2\chi_R}\right)^{-1} &\Rightarrow \chi'_{elec} = (1 - f_R) \left(1 + \frac{2\chi_R}{3\chi'_{elec}}\right) \chi'_{elec} \\ &\Rightarrow \chi_R = \frac{3}{2} f_R \left(1 + \frac{2\chi_R}{3\chi'_{elec}}\right) \chi'_{elec} \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

et

$$n_{2,j} = \frac{3}{8n_{\text{eff},j}} \chi'_{elec} \left(1 + \frac{2\chi_R}{3\chi'_{elec}}\right) \quad \alpha_{2,j} = \frac{3\omega_j}{4n_{\text{eff},j}c} \chi''_{elec} \quad (\text{B.63})$$

où  $n_2$  est l'indice non-linéaire et  $\alpha_2$  est l'absorption à deux photons.  $f_R$  est la fraction Raman qui représente la contribution Raman aux effets non-linéaires ou encore :

$$\chi^{(3)}(t) = (1 - f_R) \chi_{elec}^{(3)}(t) + f_R \chi_R^{(3)}(t) \quad (\text{B.64})$$

Dans la silice,  $f_R=0,18$  [Stolen, Gordon, Tomlinson & Haus 1989]. Avec les polarisations (B.60) et (B.61) et ces définitions, l'équation (B.59) devient :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z} U_j(z, t) + \beta_{1j} \frac{\partial}{\partial t} U_j(z, t) + \frac{i\beta_{2j}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_j(z, t) - \frac{\beta_{3j}}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} U_j(z, t) + \frac{\alpha_j}{2} U_j(z, t) \\ &= \frac{i\omega_j}{4n_{\text{eff},j}c} \left(1 + \frac{i}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ \frac{3}{2} (\chi'_{elec} + i\chi''_{elec}) F_j^{elec}(z, t) + \chi_R F_j^R(z, t) \right] \\ &= \frac{3i\omega_j \chi'_{elec}}{8n_{\text{eff},j}c} \left(1 + \frac{2\chi_R}{3\chi'_{elec}}\right) \left(1 + \frac{i}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ (1 - f_R) F_j^{elec}(z, t) + f_R F_j^R(z, t) \right] \\ &\quad + \frac{\alpha_{2,j}}{2} \left(1 + \frac{i}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial t}\right) F_j^{elec}(z, t) \\ &= \frac{i\omega_j n_{2,j}}{c} \left(1 + \frac{i}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ (1 - f_R) F_j^{elec}(z, t) + f_R F_j^R(z, t) \right] \\ &\quad + \frac{\alpha_{2,j}}{2} \left(1 + \frac{i}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial t}\right) F_j^{elec}(z, t) \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

**Approximation 19** *L'aire effective du mode varie peu sur la largeur du gain Raman de 40 THz; nous posons donc  $A_{\text{eff},jk} \approx A_{\text{eff}}$ .*

L'équation (B.65) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} U_j(z, t) + \beta_{1j} \frac{\partial}{\partial t} U_j(z, t) + \frac{i\beta_{2j}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_j(z, t) - \frac{\beta_{3j}}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} U_j(z, t) + \frac{\alpha_j}{2} U_j(z, t) \\
& = i\gamma_j \left( 1 + \frac{i}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ (1 - f_R) U_j(z, t) \left( \underbrace{|U_j(z, t)|^2}_1 + \underbrace{2|U_k(z, t)|^2}_2 \right) \right. \\
& \quad + f_R U_j(z, t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') \left[ \underbrace{|U_j(z, t')|^2}_3 + \underbrace{|U_k(z, t')|^2}_4 \right] dt' \\
& \quad \left. + f_R U_k(z, t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') U_j(z, t') U_k^*(z, t') e^{-i(\omega_j - \omega_k)(t - t')} dt' \right] \\
& \quad + \frac{\alpha_{2,j}}{2} \left( 1 + \frac{i}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial t} \right) \underbrace{U_j(z, t) \left( |U_j(z, t)|^2 + 2|U_k(z, t)|^2 \right)}_6
\end{aligned} \tag{B.66}$$

où

$$\gamma_j = \frac{\omega_j n_{2,j}}{c A_{\text{eff}}} \tag{B.67}$$

L'équation (B.66) gouverne la propagation d'impulsions plus longues que 100 femtosecondes. Elle est l'équation que nous retrouvons dans la littérature [Agrawal 2001], [Mamyshev & Chernikov 1990], [Headley & Agrawal 1996]. Du côté gauche de l'équation, le premier terme nous donne la variation de l'enveloppe selon  $z$ , les trois termes suivants représentent les différents ordres de dispersion et le dernier terme l'absorption optique. Du côté droit, les deux premiers termes (1 et 2) sont l'auto-modulation (AMP) de phase et la modulation de phase mutuelle (MPM) provenant de la contribution électronique. L'AMP ajoute une phase au champ qui est proportionnelle à la puissance de ce dernier tandis que la MPM ajoute une phase proportionnelle aux puissances des autres champs présents. Les deux termes suivants (3 et 4) donnent la contribution moléculaire (Raman) à l'AMP et la MPM tandis que le terme (5) nous donne le gain Raman. Le dernier terme (6) est l'absorption non-linéaire ou l'absorption à deux photons. La dérivée temporelle du côté droit représente la dépendance en fréquence de la non-linéarité. Elle est responsable de



l'auto-raïdissement (et donc la formation d'ondes de choc) pour la non-linéarité électronique et de l'auto-décalage en fréquence dans le cas Raman.

## B.5 Équations de propagation picoseconde

Quand la durée des impulsions est plus longue (supérieure à 1 picoseconde), nous pouvons simplifier davantage les équations de propagation.

**Approximation 20** *Lorsque les impulsions sont de durée supérieure à 1 picoseconde, la réponse du gain Raman peut être considérée comme instantanée, ce qui nous permet de simplifier davantage l'équation (B.66) en traitant  $U(z, t)$  comme une constante dans l'intégrale de convolution.*

Nous obtenons pour le premier terme Raman :

$$\begin{aligned}
 U_j(z, t) & \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') \left[ |U_j(z, t')|^2 + |U_k(z, t')|^2 \right] dt' \\
 & = U_j(z, t) \left[ |U_j(z, t)|^2 + |U_k(z, t)|^2 \right] \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') dt' \\
 & = U_j(z, t) \left[ |U_j(z, t)|^2 + |U_k(z, t)|^2 \right]
 \end{aligned} \tag{B.68}$$

L'intégrale vaut 1 par définition de (B.20). Pour le deuxième terme :

$$\begin{aligned}
 U_k(z, t) & \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') U_j(z, t') U_k^*(z, t') e^{-i(\omega_j - \omega_k)(t - t')} dt' \\
 & = |U_k(z, t)|^2 U_j(z, t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(t - t') e^{-i(\omega_j - \omega_k)(t - t')} dt' \\
 & = -\tilde{h}_R(-\Omega_{jk}) |U_k(z, t)|^2 U_j(z, t)
 \end{aligned} \tag{B.69}$$

La deuxième intégrale est la transformée de Fourier de  $h_R$  en fonction de la différence de fréquence  $\Omega_{jk} = \omega_j - \omega_k$ . Le spectre de l'impulsion est très étroit comparé à celui de la courbe de gain selon l'approximation 1.20 ; le gain est donc constant sur toute la durée de l'impulsion.

**Hypothèse 6** *Il est plus avantageux de faire le design d'un laser pour avoir un maximum de gain; plaçons le signal au maximum de la courbe de gain. Selon la figure (B.1), nous voyons qu'au maximum de la courbe de gain,  $\tilde{h}_R$  est essentiellement imaginaire ( $\tilde{h}'_R = 0$ ) ce qui veut dire qu'il n'y a pas de modulation d'indice due à l'effet Raman pour ce terme. (Il est intéressant aussi de remarquer que  $\tilde{h}_R(-\Omega_{jk}) = -\tilde{h}_R(\Omega_{jk}) = \tilde{h}_R(\Omega_{kj})$ ).*

Il s'ensuit que (B.69) s'écrit :

$$-\tilde{h}_R''(-\Omega_{jk})|U_k(z, t)|^2 U_j(z, t) = i\tilde{h}_R''(\Omega_{jk})U_j(z, t)|U_k(z, t)|^2 \quad (\text{B.70})$$

**Approximation 21** *Lorsque les impulsions sont d'une durée supérieure à 1 ps, nous limitons la série de Taylor (B.55) à l'ordre 2 et donc la dispersion peut être limitée à l'ordre 2.*

**Approximation 22** *Lorsque les impulsions sont plus longues que 1 ps, la dérivée temporelle dans le membre de droite de (B.66) peut être négligée. L'équation (B.66) devient alors en utilisant (B.68) et (B.70) :*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} U_j(z, t) + \beta_{1j} \frac{\partial}{\partial t} U_j(z, t) + \frac{i\beta_{2j}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_j(z, t) + \frac{\alpha_j}{2} U_j(z, t) \\ &= i\gamma_j \left[ |U_j(z, t)|^2 + (2 - f_R) |U_k(z, t)|^2 \right] U_j(z, t) - \gamma_j f_R \tilde{h}_R''(\Omega_{jk}) |U_k|^2(z, t) U_j(z, t) \\ &+ \frac{\alpha_{2,j}}{2} U_j(z, t) \left( |U_j(z, t)|^2 + 2|U_k(z, t)|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

**Approximation 23** *Dans la silice, l'absorption non-linéaire est très faible; posons ainsi  $\alpha_{2,j} = 0$ .*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} U_j(z, t) + \beta_{1j} \frac{\partial}{\partial t} U_j(z, t) + \frac{i\beta_{2j}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_j(z, t) + \frac{\alpha_j}{2} U_j(z, t) \\ &= i\gamma_j \left[ |U_j(z, t)|^2 + (2 - f_R) |U_k(z, t)|^2 \right] U_j(z, t) - \gamma_j f_R \tilde{h}_R''(\Omega_{jk}) |U_k|^2(z, t) U_j(z, t) \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

De manière plus explicite, nous obtenons les équations de propagation suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} U_p(z, t) + \beta_{1p} \frac{\partial}{\partial t} U_p(z, t) + \frac{i\beta_{2p}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_p(z, t) + \frac{\alpha_p}{2} U_p(z, t) \\ &= i\gamma_p \left[ |U_p(z, t)|^2 + (2 - f_R) |U_s(z, t)|^2 \right] U_p(z, t) - \frac{g_p}{2} |U_s|^2(z, t) U_p(z, t) \quad (\text{B.73}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} U_s(z, t) + \beta_{1s} \frac{\partial}{\partial t} U_s(z, t) + \frac{i\beta_{2s}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_s(z, t) + \frac{\alpha_s}{2} U_s(z, t) \\ &= i\gamma_s \left[ |U_s(z, t)|^2 + (2 - f_R) |U_p(z, t)|^2 \right] U_s(z, t) + \frac{g_s}{2} |U_p|^2(z, t) U_s(z, t) \quad (\text{B.74}) \end{aligned}$$

où

$$g_j = 2\gamma_j f_R \tilde{h}_R''(\Omega_{ps}) \quad \text{avec} \quad \Omega_{ps} = \omega_p - \omega_s \quad (\text{B.75})$$

en se souvenant que :

$$\gamma_j = \frac{\omega_j n_2}{c A_{\text{eff}}} \quad f_R = \frac{1}{1 + \frac{3\chi_{\text{elec}}}{2\chi_R}}.$$

Les équations (B.73) et (B.74) nous permettent de calculer la propagation d'impulsions d'une durée supérieure à la picoseconde.

## B.6 Équations en régime continu et quasi-continu

Dans cette section, nous déterminons les équations régissant le transfert de puissance par diffusion Raman stimulée en régime permanent ou transitoire pour des champs continus.

### B.6.1 Cohérence

Depuis le début, nous avons supposé que tous les champs étaient cohérents. Cette supposition est généralement vraie puisque les lasers ont des temps de cohérence  $T_c$

supérieurs à la nanoseconde. Il s'ensuit que les impulsions d'une durée inférieure à  $T_c$  sont cohérentes. Pour des impulsions plus longues ou des champs continus, qui sont partiellement cohérents ou incohérents, le spectre ne s'obtient plus directement par la transformée de Fourier. Il faut utiliser le théorème de Wiener-Kintchine [Mandel & Wolf 1995] :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(z, t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{B.76})$$

où  $S(\omega)$  est le spectre en puissance et  $\Gamma(z, t)$  est la fonction d'auto-corrélation donnée par

$$\Gamma(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U^*(\tau) U(t + \tau) d\tau \quad (\text{B.77})$$

Un signal continu parfaitement cohérent est monochromatique ; la cohérence partielle élargit le spectre. Un signal partiellement cohérent fluctue en phase et en intensité. Quand un champ partiellement cohérent se propage, l'AMP et la MPX transforment les fluctuations d'intensité en fluctuations de phase, ce qui diminue la cohérence (et donc  $T_c$ ) et élargit conséquemment le spectre [Manassah 1990], [Manassah 1991].

**Approximation 24** *Dans ce qui suit, nous ne considérons que des champs continus ou modulés à basse fréquence de sorte que nous pouvons négliger la dispersion ( $\beta_2 = 0$ ). Le système s'écrit alors :*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} U_p(z, t) + \beta_{1p} \frac{\partial}{\partial t} U_p(z, t) + \frac{\alpha_p}{2} U_p(z, t) \\ &= i\gamma_p \left[ |U_p(z, t)|^2 + (2 - f_R) |U_s(z, t)|^2 \right] U_p(z, t) - \frac{g_p}{2} |U_s|^2(z, t) U_p(z, t) \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} U_s(z, t) + \beta_{1s} \frac{\partial}{\partial t} U_s(z, t) + \frac{\alpha_s}{2} U_s(z, t) \\ &= i\gamma_s \left[ |U_s(z, t)|^2 + (2 - f_R) |U_p(z, t)|^2 \right] U_s(z, t) + \frac{g_s}{2} |U_p|^2(z, t) U_s(z, t) \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

Pour connaître l'évolution du spectre il faut résoudre (B.78) et (B.79) puis utiliser le théorème (B.76).

Les équations de propagation peuvent être écrites en puissance. Sachant que  $P_j(z, t) = |U_j|^2$ , il s'ensuit que

$$\frac{\partial P_j(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ U_j^*(z, t) U_j(z, t) \right] = U_j^* \frac{\partial U_j}{\partial z} + U_j \frac{\partial U_j^*}{\partial z} \quad (\text{B.80})$$

**Approximation 25** *En posant que le champ est cohérent, il n'y a pas de fluctuations d'intensité. La phase accumulée par l'AMP et la MPX est constante et ne change pas le spectre. Avec (B.80) nous obtenons :*

$$\frac{\partial P_p(z, t)}{\partial z} + \beta_{1p} \frac{\partial P_p(z, t)}{\partial t} + \alpha_p P_p(z, t) = -g_p P_s(z, t) P_p(z, t) \quad (\text{B.81})$$

$$\frac{\partial P_s(z, t)}{\partial z} + \beta_{1s} \frac{\partial P_s(z, t)}{\partial t} + \alpha_s P_s(z, t) = g_s P_p(z, t) P_s(z, t) \quad (\text{B.82})$$

Dans le cas où les champs sont continus, la dérivée temporelle devient nulle.

$$\frac{dP_p(z)}{dz} = -g_p P_s(z) P_p(z) - \alpha_p P_p(z) \quad (\text{B.83})$$

$$\frac{dP_s(z)}{dz} = g_s P_p(z) P_s(z) - \alpha_s P_s(z) \quad (\text{B.84})$$

où  $g_j$  est donné par l'expression (B.75).

Ces deux derniers systèmes d'équations décrivent le *pompage* Raman *entre* deux champs continus dans une fibre optique et correspondent bien à ce que nous retrouvons dans la littérature [AuYeung & Yariv 1979], [Agrawal 2001]

## Annexe C

# Décomposition QR

### C.1 Définition

La décomposition QR sépare la matrice  $\mathbf{T}$  en un produit de deux matrices  $N \times N$ , de sorte que  $\mathbf{Q}$  est une matrice orthonormale et  $\mathbf{R}$  une matrice triangulaire supérieure. Nous avons ainsi :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q}^\dagger \mathbf{Q} = \mathbf{1} \quad (\text{C.1})$$

où le symbole  $\dagger$  indique la transposée conjuguée. L'avantage de cette décomposition est que la matrice  $\mathbf{Q}$  est rapidement inversible de sorte qu'il est facile de résoudre un système linéaire.

$$\mathbf{T}\vec{x} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}\vec{x} = \mathbf{Q}^\dagger \vec{b} \quad (\text{C.2})$$

Les vecteurs formant la matrice  $\mathbf{Q}$  doivent être orthogonaux entre eux. Pour les obtenir, nous utilisons la méthode de Gram-Schmidt. Les vecteurs normalisés ainsi obtenus forment les colonnes de la matrice  $\mathbf{Q}$ . Les vecteurs de la matrice  $\mathbf{R}$  représentent donc les projections des vecteurs de  $\mathbf{T}$  sur ceux de  $\mathbf{Q}$  ; à cause de la méthode de Gram-Schmidt,  $\mathbf{R}$  est triangulaire supérieure.

## C.2 Algorithme QR

L'idée de l'algorithme est d'appliquer la décomposition QR sur notre matrice  $\mathbf{T}$  et de la redéfinir comme  $\mathbf{RQ}$  :

$$\mathbf{T}_l = \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_l \quad \mathbf{T}_{l+1} = \mathbf{R}_l \mathbf{Q}_l = \mathbf{Q}_l^\dagger \mathbf{T}_l \mathbf{Q}_l \quad (\text{C.3})$$

à l'itération  $l$ . L'algorithme fait donc un changement de base sur la matrice  $\mathbf{T}_l$ . Si  $\mathbf{Q}$  est la matrice des vecteurs propres de  $\mathbf{T}_l$ , la matrice  $\mathbf{T}_{l+1}$  est la matrice diagonale des valeurs propres. On peut montrer qu'en appliquant successivement la transformation sur une matrice tridiagonale ou une matrice de Hessenberg (une matrice de Hessenberg est une matrice triangulaire avec la diagonale sous la diagonale principale remplie), la diagonale principale de  $\mathbf{T}_l$  tend vers les valeurs propres alors que celle en dessous tend vers zéro. Il existe des algorithmes qui permettent de transformer la matrice  $\mathbf{T}$  en une matrice de Hessenberg et de conserver les mêmes valeurs propres. Pour accélérer la convergence de l'algorithme, nous pouvons faire un décalage  $k_l$  qui correspond à la valeur propre (ou la valeur la plus proche de cette dernière). L'algorithme s'écrit ainsi :

$$\mathbf{T}_l - k_l \mathbf{I} = \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_l \quad \mathbf{T}_{l+1} = k_l \mathbf{I} + \mathbf{R}_l \mathbf{Q}_l = \mathbf{Q}_l^\dagger \mathbf{T}_l \mathbf{Q}_l \quad (\text{C.4})$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité. Typiquement, les valeurs propres apparaissent dans le coin inférieur droit de la matrice en premier ; nous prendrons donc  $k_l = t_{NN}$  ou le déterminant de la matrice formée des éléments  $t_{N-1N-1}$ ,  $t_{N-1N}$ ,  $t_{NN-1}$  et  $t_{NN}$ . Nous pouvons également réduire la taille de la matrice pour accélérer la convergence. Quand l'élément  $t_{NN-1}$  devient zéro, cela veut dire que l'élément  $t_{NN}$  est une valeur propre ; nous éliminons donc la dernière ligne et la dernière colonne et continuons l'algorithme jusqu'à ce que la matrice  $\mathbf{T}_l$  soit  $2 \times 2$ .

### C.3 Calcul des vecteurs propres

Pour calculer les vecteurs propres, nous cherchons d'abord les valeurs propres, puis nous n'avons qu'à résoudre un système linéaire.

$$\mathbf{T}\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\vec{v} = \vec{0} \quad (\text{C.5})$$

Pour résoudre, nous faisons la décomposition QR sur  $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$  et appliquons  $\mathbf{Q}^\dagger$  de chaque côté de (C.5) de sorte que nous avons  $\mathbf{R}\vec{v} = \vec{0}$ . Nous posons arbitrairement  $v_n = 1$ , trouvons les autres composantes  $v_j$  en remontant  $R$  et normalisons  $\vec{v}$  à la fin. Le vecteurs  $\vec{v}$  ainsi trouvé est un des vecteurs propres de  $\mathbf{T}$ . Il suffit de recommencer avec les autres valeurs propres pour trouver les autres vecteurs propres.



## Annexe D

# Instabilité de modulation avec saut de puissance

### D.1 Instabilité de modulation

Nous montrons maintenant que des instabilités de modulation apparaissent lorsque la puissance dans la fibre change abruptement, même dans le régime de dispersion normal. Soit le système d'équations linéarisé régissant les perturbations dans le cas de l'auto-modulation de phase. Le système est obtenu par la technique du chapitre 2 en tenant compte que de l'auto-modulation de phase.

$$\frac{\partial V_+}{\partial z} = \frac{i}{2}\beta_2\Omega^2 V_+ + i\gamma P(V_+ + V_-^*) \quad (\text{D.1a})$$

$$\frac{\partial V_-^*}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2\Omega^2 V_-^* - i\gamma P(V_+ + V_-^*) \quad (\text{D.1b})$$

qui peut se réécrire sous la forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} V_+ \\ V_-^* \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} V_+ \\ V_-^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i}{2}\beta_2\Omega^2 + i\gamma P & i\gamma P \\ -i\gamma P & -\frac{i}{2}\beta_2\Omega^2 - i\gamma P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_+ \\ V_-^* \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

La solution s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_+(z) \\ V_-^*(z) \end{bmatrix} &= \exp(\mathbf{A}z) \begin{bmatrix} V_{0+} \\ V_{0-}^* \end{bmatrix} = \mathbf{P} e^{\mathbf{D}z} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} V_{0+} \\ V_{0-}^* \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_+ z} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- z} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} V_{0+} \\ V_{0-}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

où  $\lambda_{\pm}$  sont les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  et les matrices de passage  $\mathbf{P}$  sont données par les vecteurs propres de  $\mathbf{A}$ . Les valeurs propres sont données par l'équation :

$$\begin{vmatrix} \frac{i}{2}\beta_2\Omega^2 + i\gamma P - \lambda & i\gamma P \\ -i\gamma P & -\frac{i}{2}\beta_2\Omega^2 - i\gamma P - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{D.4})$$

avec le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{i}{2}\beta_2\Omega^2 + i\gamma P - \lambda\right) \left(-\frac{i}{2}\beta_2\Omega^2 - i\gamma P - \lambda\right) - (i\gamma P)(-i\gamma P) = 0 \\ &- \left[\left(\frac{i}{2}\beta_2\Omega^2 + i\gamma P\right)^2 - \lambda^2\right] - \gamma^2 P^2 = 0 \\ &-\frac{\beta_2^2\Omega^4}{4} - \beta_2\Omega^2\gamma P - \gamma^2 P^2 - \lambda^2 + \gamma^2 P^2 = 0 \end{aligned}$$

dont les solutions sont :

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{i}{2}\beta_2\Omega \left(\frac{4\gamma P}{\beta_2} + \Omega^2\right)^{1/2} = \pm iDN. \quad (\text{D.5})$$

où

$$D = \frac{\beta_2\Omega^2}{2} \quad \text{et} \quad N = \left(\frac{4\gamma P}{\beta_2\Omega^2} + 1\right)^{1/2} \quad (\text{D.6})$$

Il est évident de constater que  $\lambda_+ = -\lambda_-$ . Il est maintenant possible de déterminer les vecteurs propres de  $A$ . Il faut remplacer les valeurs propres (D.5) dans (D.4) et

résoudre le système linéaire.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{i}{2}\beta_2\Omega^2 + i\gamma P \mp iDN & i\gamma P \\ -i\gamma P & -\frac{i}{2}\beta_2\Omega^2 - i\gamma P \mp iDN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\pm 11} \\ v_{\pm 21} \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} iD(1 \mp N) + i\gamma P & i\gamma P \\ -i\gamma P & -iD(1 \pm N) - i\gamma P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\pm 11} \\ v_{\pm 21} \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Il s'ensuit que :

$$(1 \mp N)v_{\pm 11} - (1 \pm N)v_{\pm 21} = 0$$

Les vecteurs propres sont donc :

$$\vec{v}_+ = \frac{1}{\sqrt{2(1+N^2)}} \begin{bmatrix} 1+N \\ 1-N \end{bmatrix} \quad \vec{v}_- = \frac{1}{\sqrt{2(1+N^2)}} \begin{bmatrix} 1-N \\ 1+N \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

À faible puissance,  $N$  tend vers l'unité et les vecteurs propres deviennent orthogonaux.

Les vecteurs propres nous permettent de calculer les matrices de passage suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{\sqrt{2(1+N^2)}} \begin{bmatrix} 1+N & 1-N \\ 1-N & 1+N \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}^{-1} &= \frac{\sqrt{2(1+N^2)}}{4N} \begin{bmatrix} 1+N & -(1-N) \\ -(1-N) & 1+N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

La matrice de propagation sur une distance  $z = L$  est ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \mathbf{P} e^{\mathbf{D}L} \mathbf{P}^{-1} \\
&= \frac{1}{4N} \begin{bmatrix} 1+N & 1-N \\ 1-N & 1+N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda L} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+N & -(1-N) \\ -(1-N) & 1+N \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4N} \begin{bmatrix} 1+N & 1-N \\ 1-N & 1+N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+N)e^{\lambda L} & -(1-N)e^{\lambda L} \\ -(1-N)e^{-\lambda L} & (1+N)e^{-\lambda L} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4N} \begin{bmatrix} (1+N)^2 e^{\lambda L} - (1-N)^2 e^{-\lambda L} & (1+N)(1-N)(e^{-\lambda L} - e^{\lambda L}) \\ (1+N)(1-N)(e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) & (1+N)^2 e^{-\lambda L} - (1-N)^2 e^{\lambda L} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2N} \begin{bmatrix} (1+N^2) \sinh(\lambda L) + 2N \cosh(\lambda L) & -(1-N^2) \sinh(\lambda L) \\ (1-N^2) \sinh(\lambda L) & -(1+N^2) \sinh(\lambda L) + 2N \cosh(\lambda L) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{D.10}$$

## D.2 Instabilité de modulation avec changement de puissance

Soient deux sections de longueurs respectives  $L_1$  et  $L_2$  avec des valeurs de  $N$  différentes ( $N_1 \neq N_2$ ). Cette différence peut provenir d'un changement de puissance, de dispersion ou même d'aire effective. La propagation totale est dans ce cas donnée par le produit des matrices de propagation. Pour deux «tranches», nous obtenons :

$$\mathbf{H}_{\text{Total}} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} a+b & c-d \\ c+d & a-b \end{bmatrix} \tag{D.11}$$

Avec

$$a = \frac{(N_2^2 + N_1^2)}{2N_1N_2} \sinh(\lambda_1 L_1) \sinh(\lambda_2 L_2) + \cosh(\lambda_1 L_1) \cosh(\lambda_2 L_2) \quad (\text{D.12a})$$

$$b = \frac{(1 + N_1^2)}{2N_1} \sinh(\lambda_1 L_1) \cosh(\lambda_2 L_2) + \frac{(1 + N_2^2)}{2N_2} \cosh(\lambda_1 L_1) \sinh(\lambda_2 L_2) \quad (\text{D.12b})$$

$$c = \frac{(N_2^2 - N_1^2)}{2N_1N_2} \sinh(\lambda_1 L_1) \sinh(\lambda_2 L_2) \quad (\text{D.12c})$$

$$d = \frac{(1 - N_1^2)}{2N_1} \sinh(\lambda_1 L_1) \cosh(\lambda_2 L_2) + \frac{(1 - N_2^2)}{2N_2} \cosh(\lambda_1 L_1) \sinh(\lambda_2 L_2) \quad (\text{D.12d})$$

Il est maintenant possible de calculer les valeurs propres de la matrice de propagation totale.

$$\begin{vmatrix} a + b - \mu & c - d \\ c + d & a - b - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{D.13})$$

avec le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} (a + b - \mu)(a - b - \mu) - (c^2 - d^2) &= 0 \\ \mu^2 - 2a\mu + a^2 + d^2 - b^2 - c^2 &= 0 \\ \mu &= a \pm (b^2 + c^2 - d^2)^{1/2} \\ \mu &= \frac{N_1^2 + N_2^2}{2N_1N_2} \sinh(\lambda_1 L_1) \sinh(\lambda_2 L_2) + \cosh(\lambda_1 L_1) \cosh(\lambda_2 L_2) \\ &\quad \pm \left[ \frac{(N_2^2 - N_1^2)^2}{4N_1^2N_2^2} \sinh^2(\lambda_1 L_1) \sinh^2(\lambda_2 L_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_1^2 + N_2^2}{N_1N_2} \sinh(\lambda_1 L_1) \sinh(\lambda_2 L_2) \cosh(\lambda_1 L_1) \cosh(\lambda_2 L_2) \right. \\ &\quad \left. + \sinh^2(\lambda_1 L_1) \cosh^2(\lambda_2 L_2) + \sinh^2(\lambda_2 L_2) \cosh^2(\lambda_1 L_1) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

En simplifiant :

$$\begin{aligned} \mu = & \frac{(N_2 - N_1)^2}{2N_1N_2} \sinh(\lambda_1 L_1) \sinh(\lambda_2 L_2) + \cosh(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2) \\ & \pm \left[ \frac{(N_2^2 - N_1^2)^2}{4N_1^2 N_2^2} \sinh^2(\lambda_1 L_1) \sinh^2(\lambda_2 L_2) + \frac{(N_2 - N_1)^2}{4N_1 N_2} \sinh(2\lambda_1 L_1) \sinh(2\lambda_2 L_2) \right. \\ & \left. + \sinh^2(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

En explicitant les valeurs de  $\lambda_j$  :

$$\begin{aligned} \mu = & - \frac{(N_2 - N_1)^2}{2N_1N_2} \sin(D_1 N_1 L_1) \sin(D_2 N_2 L_2) + \cos(D_1 N_1 L_1 + D_2 N_2 L_2) \\ & \pm \left[ \frac{(N_2^2 - N_1^2)^2}{4N_1^2 N_2^2} \sin^2(D_1 N_1 L_1) \sin^2(D_2 N_2 L_2) \right. \\ & \left. - \frac{(N_2 - N_1)^2}{4N_1 N_2} \sin(2D_1 N_1 L_1) \sin(2D_2 N_2 L_2) - \sin^2(D_1 N_1 L_1 + D_2 N_2 L_2) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Dans le cas où  $N_1 = N_2 = N$  et  $L_1 = L_2 = L/2$ , nous retrouvons bien les valeurs propres sur une tranche.

$$\mu = \cos(DNL) \pm [-\sin^2(DNL)]^{1/2} = \cos(DNL) \pm i \sin(DNL) = \exp(\pm i DNL) \quad (\text{D.17})$$

Les valeurs propres peuvent être supérieures à l'unité pour certaines fréquences en dépit du fait que la dispersion est positive. Par exemple, pour les paramètres suivants :

$\beta_2$ (ps <sup>2</sup> /km)	20
$\gamma$ ( $\mu$ m)	0,0015
Puissance tranche 1 (W)	6,0
Puissance tranche 2 (W)	3,0
Longueur tranche 1 (m)	10
Longueur tranche 2 (m)	10

nous obtenons les valeurs propres illustrées à la figure D.1. Il y a des zones d'instabilités

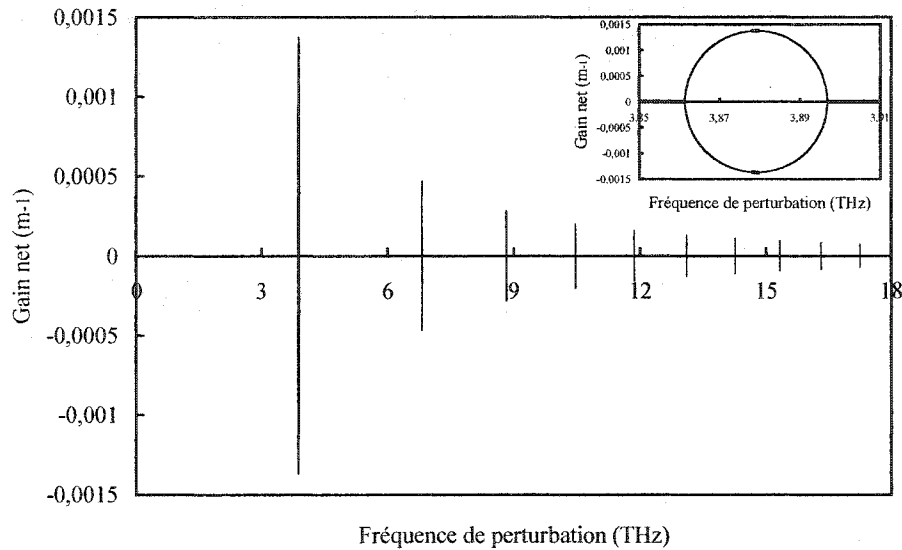


Figure D.1 : Stabilité d'une propagation avec changement soudain de puissance ;  $L_1 = L_2 = 10$  m,  $P_1 = 6$  W et  $P_2 = 3$  W. Nous voyons apparaître des zones d'instabilités, même si la dispersion est positive. Les instabilités sont périodiques en  $\Omega^2$ .

qui apparaissent. À première vue, cela peut ressembler à des instabilités de type Ikeda que l'on retrouve dans les boucles ([Coen & Haelterman 1997] [McLaughlin *et al.* 1985]), mais ce n'est pas le cas car il n'y a pas de fonctions itératives. Les instabilités sont périodiques avec  $\Omega^2$ , ce qui n'est pas surprenant considérant que la dépendance spectrale de la dispersion est en  $\Omega^2$ . La question qui se pose est à savoir si ces instabilités disparaissent dans le cas continu. Le traitement numérique pour un très grand

nombre de tranches montrent que les instabilités ne tendent pas à disparaître.

Bien qu'une variation de puissance puisse amener ces instabilités, en regardant l'équation (D.6), nous voyons qu'un changement de dispersion ferait de même. Remarquons toutefois que la largeur spectrale de ces instabilités est de quelques dizaines de picomètres, ce qui les rend difficilement observable.